

И.В. Измайлов, Б.Н. Пойзнер, Д.А. Шергин

Процессы в кольцевом интерферометре: проблема описания с помощью дискретных отображений

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 25.12.2003 г.

Для случаев одно- и двухчастотного оптического поля составлено описание процессов в нелинейном кольцевом интерферометре (НКИ) на языке дискретных отображений. Исследовано влияние физических факторов на устойчивость режимов в моделях процессов в НКИ. Предложен ряд методических приемов для интерпретации и количественного анализа морфологии карт устойчивости процессов в математической модели.

1. Введение. Дискретные отображения как язык описания динамической системы

Четырехзеркальный интерферометр, содержащий нелинейный элемент, называется нелинейным кольцевым интерферометром (НКИ). Как продемонстрировал К. Икеда с коллегами (1979 г.), важным параметром реального интерферометра является величина запаздывания τ оптического поля при прохождении через НКИ. Дальнейшие исследования С.А. Ахманова, М.А. Воронцова, В.И. Шмальгаузена с коллегами из МГУ, Н.Н. Розанова, а также ряда зарубежных авторов показали, что в поперечном сечении лазерного пучка в НКИ возможны следующие режимы: автоволны, генерация статических и движущихся структур, оптическая турбулентность, перемежаемость и хаос [1]. Поэтому модель процессов в НКИ является одной из тех, что широко охватывают многообразные явления нелинейной динамики.

На рис. 1 представлена схема кольцевого интерферометра, в котором находится тонкий слой нелинейной среды, показатель преломления которой зависит от амплитуды воздействующего на него электрического поля света (например, как при эффекте Керра).

Основным отличием рассматриваемого НКИ от модели К. Икеды является то, что в цепь обратной связи интерферометра введен линейный элемент G , обеспечивающий поточечное преобразование поля (сдвиг, наклон, поворот, растяжение, сжатие). Таким образом, траектория луча, начинающаяся в точке с координатами (x, y) , после обхода резонатора попадет в точку $(x', y') = G(x, y)$.

Как известно, поведение динамических систем можно описывать с помощью эволюционных уравнений вида

$$\tau_n dq/dt = N[q(t), q(t - \tau)], \quad (1)$$

где τ_n — характерное время релаксации.

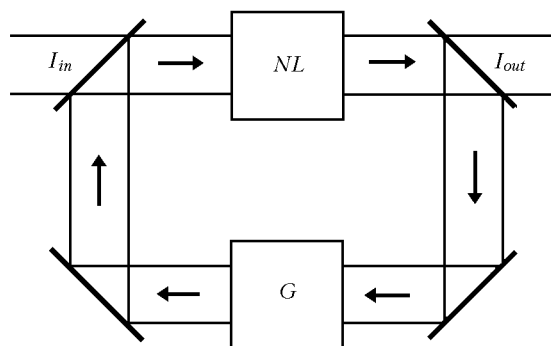


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра с двумерной обратной связью: NL — нелинейный элемент; G — элемент, осуществляющий преобразование поля; I_{in} — интенсивность светового поля на входе; I_{out} — интенсивность светового поля на выходе

Например, в статическом режиме, т.е. при отсутствии изменений во времени ($dq/dt = 0$), и разрешимости уравнения $N[q(t), q(t - \tau)] = 0$ относительно $q(t)$ модель (1) сводится к рекуррентному соотношению $q(t) = F[q(t - \tau)]$. Далее можно перейти к модели, описывающей состояние динамической системы в эквидистантные моменты времени $t_n = t_0 + \tau_n$:

$$q_n = F(q_{n-1}). \quad (2)$$

Как известно, выражение типа (2) по своей математической форме является m -мерным дискретным отображением (ДО), где m — число компонент вектора [2].

Преимуществом работы с моделями на базе ДО является их органичность цифровой вычислительной технике. А с точки зрения математического моделирования использование аппарата ДО (в рамках области его применимости) выгодно по сравнению со случаем конечно-разностных схем, применяемых для решения (1). Оперирование ДО практически снимает проблемы, типичные для решения

дифференциальных уравнений: аппроксимация, устойчивость, погрешности численных методов. Эти преимущества обуславливают популярность аппарата ДО при исследовании моделей нелинейных динамических систем.

В большинстве известных авторам работ моделирование процессов в НКИ проводится для частного случая одночастотного излучения. Чтобы приблизить модель к реальной ситуации, предположим, что на входе НКИ присутствует двухчастотное (бихроматическое) излучение. Этот сюжет начинает исследоваться лишь в самое последнее время [3, 4]. При такой постановке задачи имеются основания ожидать появления новых особенностей сложной динамики процессов в модели при выбранных предположениях. В свою очередь, это расширит представления о закономерностях поведения нелинейных кольцевых систем оптического диапазона. Кроме того, применение аппарата ДО позволяет описывать такое нетривиальное явление, как пространственный детерминированный хаос [5]. Его применение перспективно в нелинейно-динамических системах защиты информации для передачи (в статическом режиме) и хранения данных.

Цели данной работы — для случаев одно- и двухчастотного оптического поля в приближении больших его потерь составить описание процессов в НКИ на языке ДО, исследовать влияние физических факторов на устойчивость режимов в соответствующих моделях процессов в НКИ.

Для выявления типа динамики обратимся к расчету ляпуновских характеристических показателей (ЛХП), которые служат количественной мерой неустойчивости процесса. Зная ЛХП, можно определить фрактальную (дробную) размерность аттрактора, энтропию динамической системы, характерное время предсказуемости поведения системы [6].

2. Исследование режимов в модели процессов в НКИ на основе дискретного отображения

Для идентификации устойчивости режимов динамики и выяснения влияния на них физических факторов построены так называемые карты ЛХП в координатах параметров модели.

2.1. Дискретное отображение как модель процессов в НКИ: случай одночастотного излучения

В рассматриваемой модели оптической системы с двумерной обратной связью учитывается зависимость показателя преломления от квадрата напряженности оптического поля и явления интерференции световых полей. Поэтому представительной динамической переменной является нелинейный фазовый набег U , а не интенсивность. Из дифференциального уравнения, описывающего динамику U (в приближении больших потерь, когда распространение световой волны в интерферометре рассматри-

вается в приближении геометрической оптики [3]), для случая одночастотного поля, не изменяющегося ни во времени, ни в плоскости поперечного сечения xOy , практикуя подход, изложенный во введении, можно получить дискретное отображение вида

$$\begin{cases} U_0 = \text{const} = K, \\ U_i = K[1 + \gamma \cos(U_{i-1} + \Phi)], \quad i \in [1; \infty]. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь K — коэффициент нелинейности; γ — удвоенный коэффициент потерь излучения за проход в НКИ; Φ — линейный фазовый набег в контуре обратной связи интерферометра.

Результаты моделирования (3) представлены на рис. 2–4.

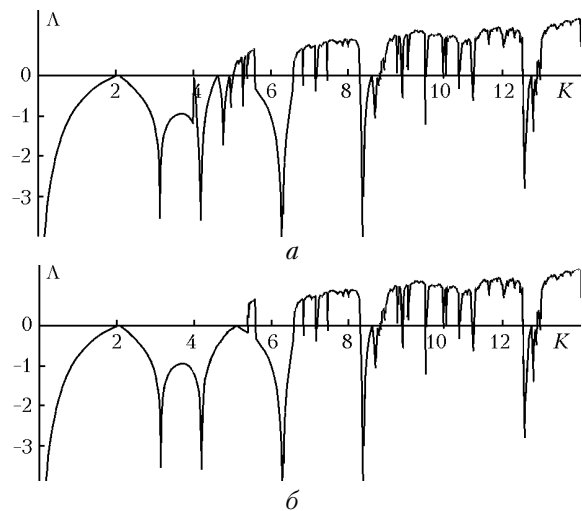


Рис. 2. Зависимость ЛХП от параметра нелинейности K при различных начальных условиях U_0 : 0,1 (а), 2 (б)

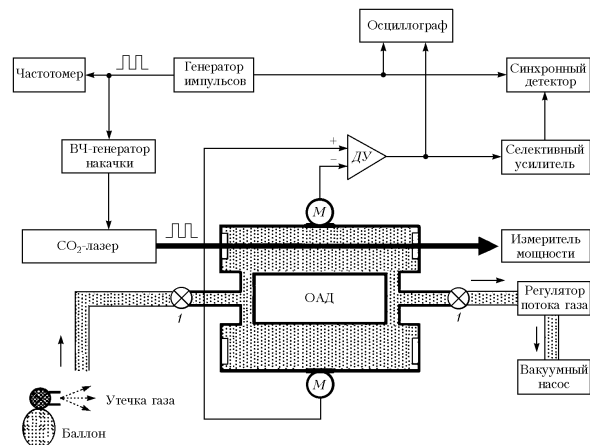


Рис. 3. Карта ЛХП в координатах $K - U_0$ ($\gamma = 0,5$)

Зависимость $\Lambda(K)$ немонотонна и испытывает смену знака либо принимает нулевые значения (см. рис. 2), что, согласно теории, соответствует смене режимов (бифуркациям). Как известно, различные бифуркации состояний происходят именно при $\Lambda = 0$ либо $\text{Re}(\tilde{\Lambda}) = 0$ (в ходе вычисления $\tilde{\Lambda}$ в ка-

честве собственных значений якобиана, т.е. матрицы линеаризации).

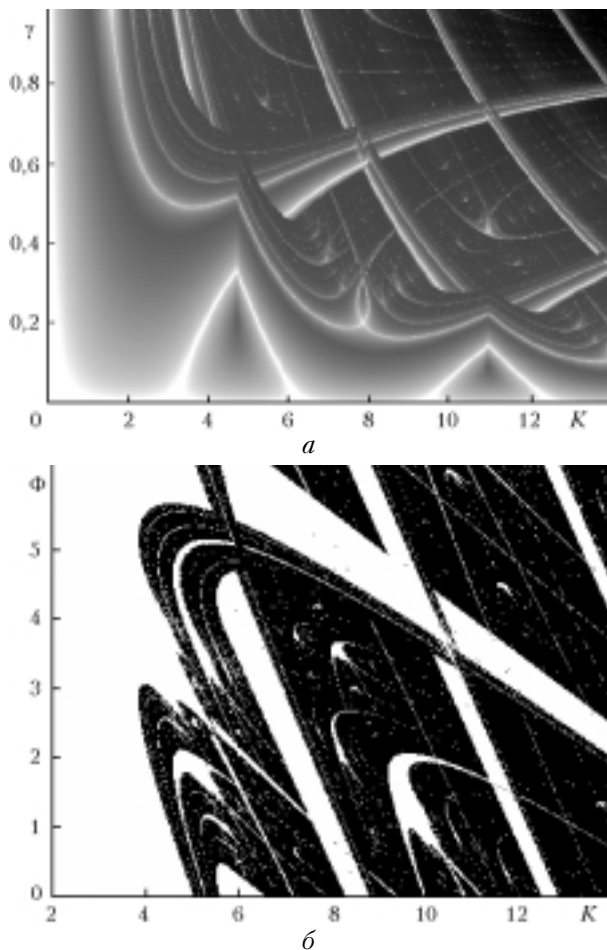


Рис. 4. Карты ЛХП в координатах $K - \gamma$ (а), $K - \Phi$ (б). Отрицательным значениям Λ соответствуют светлые области

Действительно, из сравнения структуры бифуркационной диаграммы (БД) (рис. 5) и графика зависимости $\Lambda(K)$ на рис. 2 видно, что точки, в которых $\Lambda = 0$, соответствуют особым точкам на БД, где происходят бифуркации. Таким образом, соответствие точек, где $\Lambda = 0$, и точек бифуркаций свидетельствует о математической корректности полученной зависимости.

Заметим, что по своему смыслу первое соотношение в (3) есть начальное условие для данной системы. Отметим также, что $\Lambda(K)$ зависит от U_0 . Для выяснения влияния U_0 построена карта ЛХП в координатах $K - U_0$ (см. рис. 3). Она фактически отражает зависимость наличия (отсутствия) устойчивости установившегося режима от начального состояния U_0 .

В качестве развития этого подхода объединим карты ЛХП для ДО с БД статических состояний U для ОДУ, что оказывается достаточно эффективным методическим приемом, облегчающим морфологическую интерпретацию карт и позволяющим объяснять наличие регулярной (светлые области на рис. 6) либо хаотической (темные области) динамики в модели.

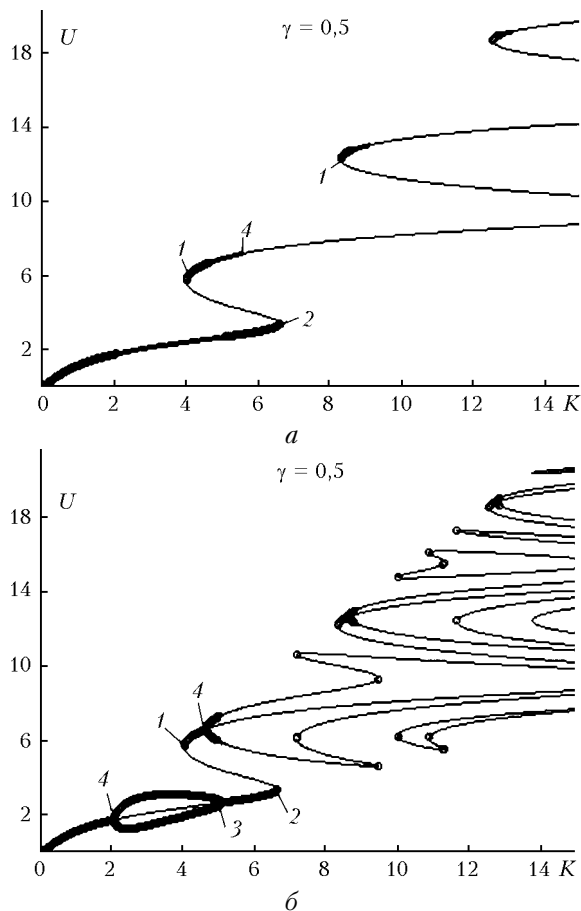


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы статических состояний нелинейного фазового набег при $\tau = \tau_n$, для $m = 1$ (а), $m = 2$ (б). Жирные линии отображают состояния, устойчивые при любых τ , линии средней толщины – состояния, устойчивые при данном τ , тонкие линии – неустойчивые состояния

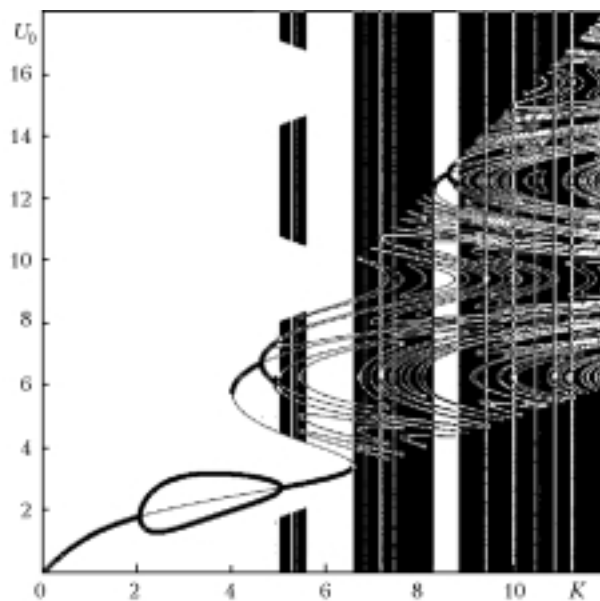


Рис. 6. Объединение «контрастных» карт ($\text{sgn}(\lambda)$) на одной плоскости с бифуркационной диаграммой статических состояний U для четырех обыкновенных ДУ

Таким образом, если на БД присутствуют устойчивые состояния (толстые линии), то на карте ЛХП им соответствуют прилежащие к ним области начальных условий, влекущих регулярное поведение системы. Причем зависимость $\Lambda(U_0)$ имеет период 2π (см. рис. 3). Корректность подхода, опирающегося на совместный анализ карты и БД, предполагает построение максимально возможного количества БД для различного числа обыкновенных ДУ.

В свете дальнейшего развития аналогии между описанием на языке ОДУ и ДО укажем на обусловленность строения карты ЛХП для ДО (см. рис. 4,б) структурой семейств линий бифуркаций для ДУ (рис. 7). А именно между ближайшими парами линий 1 и 4, 2 и 3 расположены устойчивые участки ветвей (соответствующих состояниям $U_1 = U_2$) бифуркационных диаграмм (см. рис. 5), не зависящие от числа уравнений m . Нетрудно видеть, что структура карт повторяет конфигурацию участков между линиями бифуркаций.

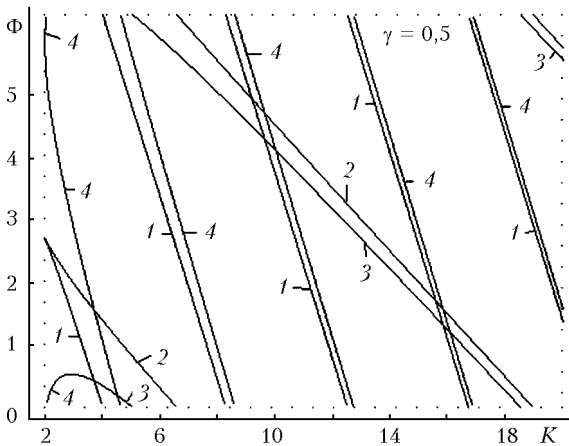


Рис. 7. Линии бифуркаций $\Phi = \omega t_0$, т.е. бифуркационное значение Φ как функция коэффициента нелинейности K . Значение Φ приведено в диапазон $[0; 2\pi]$, $m = 2$: 1 – разрывные бифуркации возникновения нового устойчивого решения (1); 2 – разрывные бифуркации исчезновения старого устойчивого решения (1); 3 – бифуркация обретения устойчивости; 4 – бифуркации потери устойчивости

Выявленные выше элементы сходства в строении карт ЛХП для различных ситуаций, а также сходство с результатами, полученными ранее для модели на базе ОДУ, свидетельствуют о правомерности описания процессов в НКИ на языке ДО.

2.2. Случай бихроматического (двухчастотного) излучения

Пусть на входе НКИ присутствует оптическое поле, состоящее из компонентов с амплитудами a и b , частоты которых равны $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ (рис. 8).

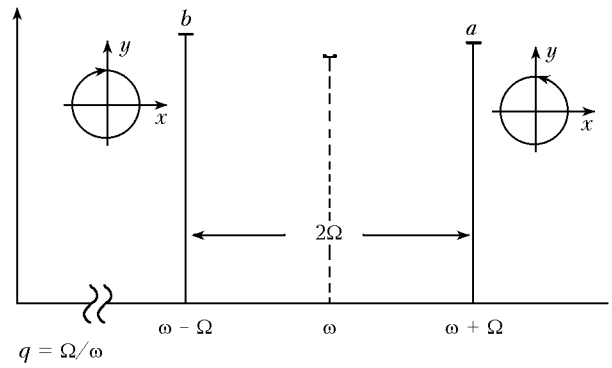


Рис. 8. Спектр бихроматического излучения

В соответствии с целью работы рассмотрим двухчастотный случай, для которого можно ожидать качественных изменений вида карт. Проверая правоту этого предположения и действуя по аналогии с выводом (2), нетрудно построить ДО для данного случая:

$$U_{i+1} = K \{1 + \gamma \{Q_a \cos [(1 + q)(\Phi + U_i)] + (1 - Q_a) \cos [(1 - q)(\Phi + U_i)]\}\}, \quad (4)$$

где Q_a – доля интенсивности компонента с частотой $(1 + q)\omega$; $q \equiv \Omega/\omega$ – параметр бихроматичности, характеризующий интервал между компонентами спектра (см. рис. 8); Φ – линейный фазовый набег на частоте ω в контуре обратной связи НКИ.

Представление о строении карт ЛХП на плоскости $K - U_0$ при сравнительно большом (0,5) отклонении параметра q от значения, соответствующего монохроматичности поля, дает рис. 9.

Качественные изменения вида карт, вызванные появлением второго компонента в спектре входного оптического поля, наглядно демонстрирует рис. 10.

В связи со специфическими трудностями описания, сопоставления и анализа морфологии карт логично искать относительно объективные количественные характеристики карты как некоей целостности. По мнению авторов данной статьи, для сравнения карт ЛХП между собой такой характеристикой может служить, например, суммарная площадь областей в пространстве параметров, которым соответствуют положительные значения ЛХП (темные области на «контрастных» картах).

Изменение соотношения площадей темных и светлых областей на картах $\Lambda(K, \gamma)$ при варьировании параметров q , Q_a изображено на рис. 11. Каждая из этих зависимостей немонотонна и содержит явно выраженный экстремум в окрестности $q = 0,16$ (рис. 11,а) и $Q_a = 0,34$ (рис. 11,б).

Более систематичная морфологическая интерпретация этих тенденций предполагает самостоятельное исследование и выходит за рамки поставленной цели.

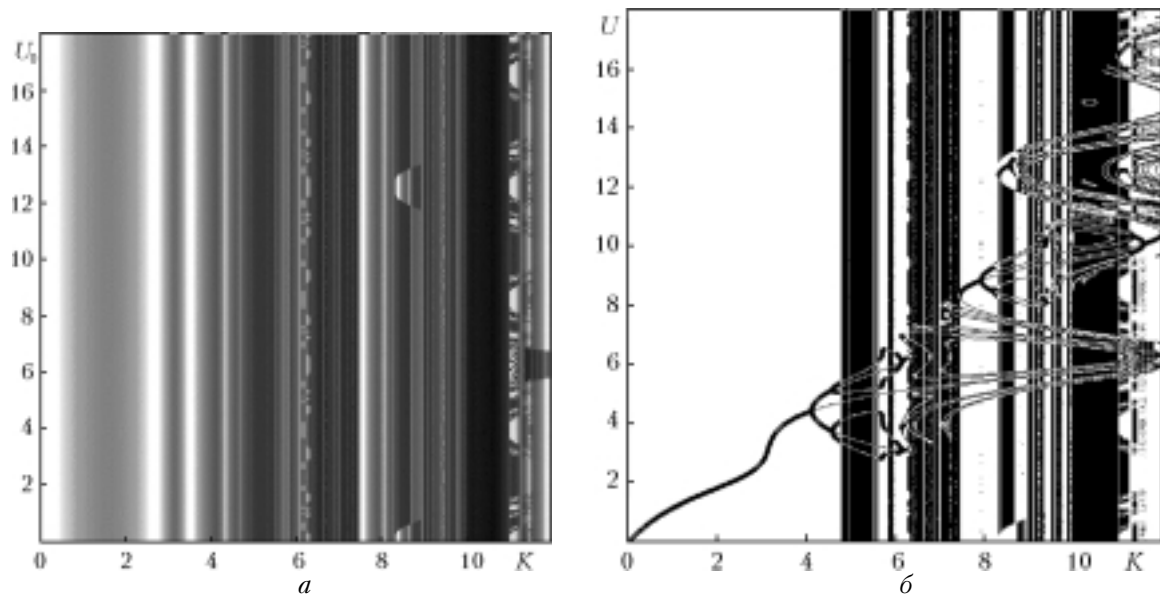


Рис. 9. Бихроматичный случай, карта ЛХП в координатах $K - U_0$ (а), объединение «контрастной» карты ($\text{sgn}(\lambda)$) с БД статических состояний (б)

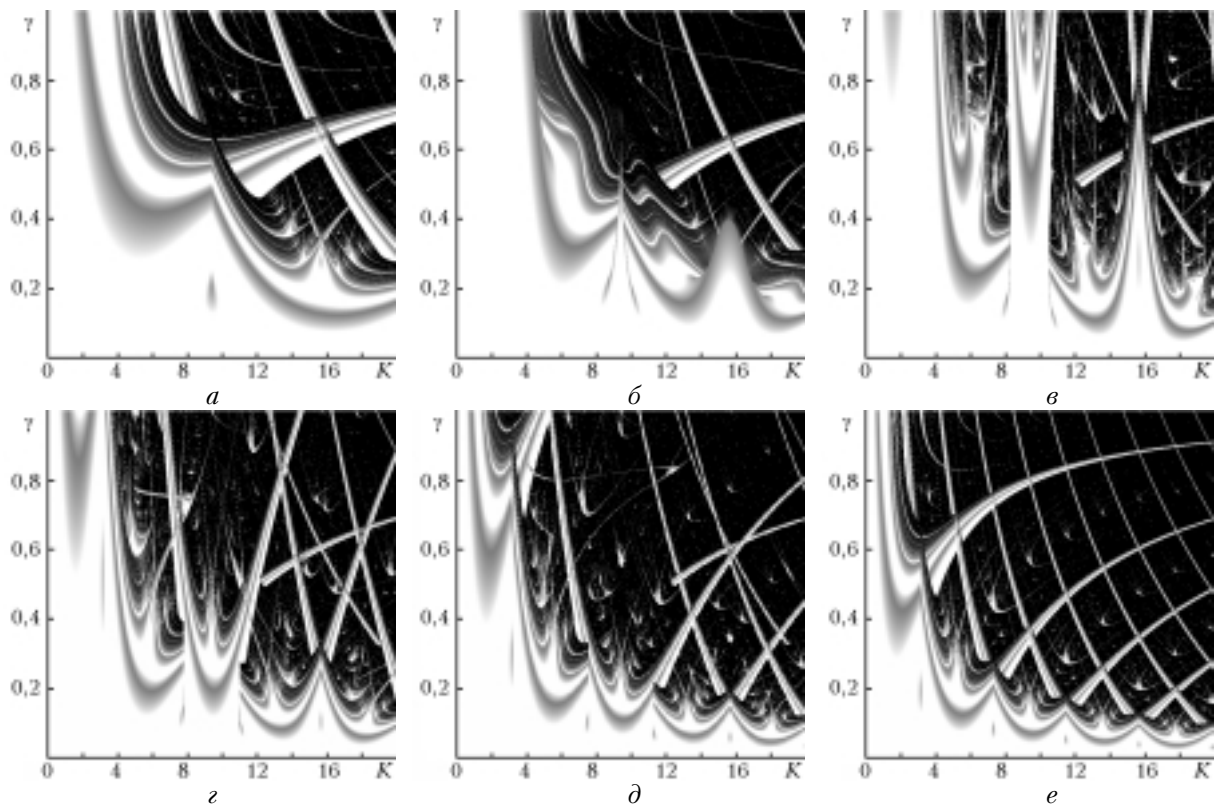


Рис. 10. Вид карт ЛХП в координатах $K - \gamma$, значения параметра Q_a : 0 (а), 0,17 (б), 0,35 (в), 0,52 (г), 0,73 (д), 0,99 (е)

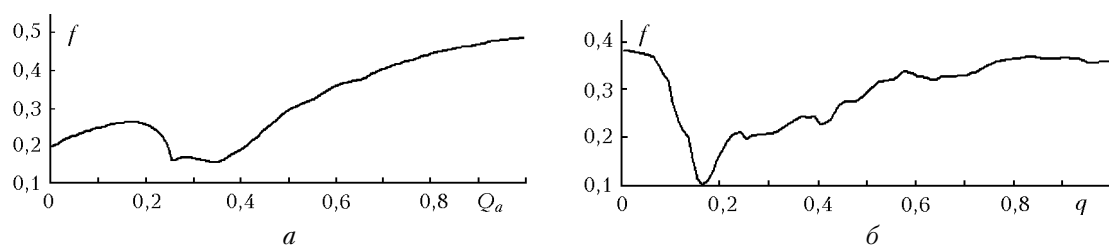


Рис. 11. Суммарная площадь областей, которым соответствуют положительные значения ЛХП (для карт в координатах $K - \gamma$)

Заклучение

В работе для случаев одно- и двухчастотного оптического поля в приближении больших его потерь составлено описание процессов в НКИ на языке ДО. Исследовано влияние физических факторов на устойчивость режимов в соответствующих моделях процессов в НКИ. Для этого построен комплекс карт ЛХП, т.е. распределений величин ЛХП на плоскостях пар параметров модели и на плоскости: параметр нелинейности — начальное условие.

Установлен факт наличия качественных изменений структуры карт при появлении второго спектрального компонента на входе НКИ.

Предложена методика интерпретации построенных карт ЛХП, основанная на использовании БД и линий бифуркации, полученных для модели на языке ОДУ. Вскрыты факты их взаимной обусловленности, что свидетельствует о правомерности применения описания на языке ДО.

Для облегчения морфологического анализа карт предложен методический прием, заключающийся в аппликации на них БД, построенных для ОДУ.

В качестве количественной характеристики карты ЛХП предложено рассчитывать долю ее площади, соответствующей неустойчивому режиму.

Полученные результаты представляют интерес для атмосферной адаптивной оптики, среди устройств которой используются НКИ [7].

1. *Ахманов С.А., Воронцов М.А.* Нестабильности и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // *Нелинейные волны: динамика и эволюция.* М.: Наука, 1989. С. 228–237.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
3. *Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Идентификация винтовой дислокации волнового фронта и компенсация ее влияния на структурообразование в моделях кольцевого интерферометра // *Изв. вузов. Физ.* 2000. Т. 43. № 2. С. 29–35.
4. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Переход к хаосу в кольцевом нелинейном резонаторе при возбуждении внешним многочастотным сигналом // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2001. Т. 65. № 12. С. 1741–1744.
5. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // *Оптика атмосф. и океана.* 2001. Т. 14. № 11. С. 1074–1086.
6. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
7. *Лукин В.П., Фортес Б.В.* Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 214 с.

I.V. Izmailov, B.N. Poizner, D.A. Shergin. Processes in ring interferometer: a problem of description by discrete maps.

Processes in a nonlinear ring interferometer (NRI) are described via discrete maps in the case of a mono- and dual-frequency optical field. Influence of physical factors on stability of regimes in the models of processes in NRI is investigated. Some techniques for interpolation and quantitative analysis of morphology of maps of mathematical model stability are proposed.