

М.О. Садыкова, Н.Р. Садыков, И.Э. Паршуков, А.Н. Афанасьев

Вывод системы эволюционных уравнений для оптических жгутов

*Российский Федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт
технической физики им. акад. Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Челябинская обл.*

Поступила в редакцию 30.12.2005 г.

С учетом коэффициентов связи между световедущими элементами получена система эволюционных дифференциальных уравнений, описывающих распространение излучения в оптических жгутов. В случае оптических жгутов, состоящих из одномодовых световедущих элементов, показано, что амплитуда поля в поперечном сечении жгута удовлетворяет параболическому (диффузионному) уравнению или уравнению Гельмгольца, где коэффициент диффузии определяется расстоянием между центрами световедущих сердцевин и интегралом перекрытия взаимодействующих мод. Показано, что в случае маломодовых и многомодовых световедущих каналов система уравнений может быть решена с помощью метода расщепления по физическим процессам.

Рассмотрена задача влияния адиабатического (конического) увеличения радиуса сердцевины световедущих элементов в области пространственно-неустановившегося режима на величину контрастности. На основе модели попарного взаимодействия световедущих элементов из анализа перекрестных помех вычислены параметры передающей функции в оптических жгутов. Исходя из результатов численных расчетов, оценено влияние поляризационных поправок к постоянным распространения простых световодов на параметры передающей функции и на величину контрастности.

Введение

Успехи волоконной оптики стали возможны в первую очередь благодаря разработке особо чистых технологий изготовления на основе кварцевого стекла волоконных световодов с малыми оптическими потерями. Одним из перспективных направлений использования световодов, и в том числе оптических жгутов, являются датчики различных физических полей, таких как электрическое и магнитное поля, механические смещения, давление, температура и др. Большое разнообразие материалов позволяет в широких пределах менять физические параметры световодов и таким образом добиваться необходимых характеристик волоконных датчиков.

В настоящее время потребность в датчиках стремительно растет в связи с быстрым развитием автоматизированных систем контроля и управления, внедрением новых технологических процессов, переходом к гибким автоматизированным производствам, повышением требований безопасности к опасным производствам. Этим требованиям в максимальной степени соответствуют волоконно-оптические датчики и приборы на базе световодов и, в частности, оптических жгутов. В случае многожильного жгута каждое оптическое волокно имеет диаметр 14–30 мкм, плотность элементов изображения лежит в интервале от 1 тыс. до 10 тыс. жил. Такие лучеводы позволяют передавать изображения на 5–10 м [1]. Другой тип оптических жгутов — многосердечниковые лучеводы, в которых диаметр сердцевины равняется 4–12 мкм, а плотность изображения составляет более 10 тыс. световедущих сердцевин. Такие жгуты позволяют передавать изображения на расстояния 100 м [2].

В настоящее время ведутся интенсивные исследования, связанные с излучением передающих свойств оптических жгутов, оптимизацией параметров жгутов. Например, в [2] исследуются рассинхронизация изображения в оптическом жгуте и влияние изгиба жгута на дисперсию мод различных световедущих каналов, а также показано, что для обеспечения передачи 1 Гбайт/с/канал на длине 100 м параметры всех сердцевин при изготовлении жгута должны быть одинаковы. В [3] предлагается теория определения передающей функции оптического жгута. В основе подхода лежит предположение наличия сильных перекрестных помех. При определении передающей функции используется преобразование Фурье–Бесселя. В [4] проведены экспериментальные исследования передающей функции от величины перекрестных помех световедущих каналов.

Связь между световедущими каналами в оптических жгутов определяется оптическими перекрестными помехами [5]. Описать перекрестные помехи можно двумя способами: 1) для вычисления перекачки мощности между световедущими каналами определяются непосредственно моды сложного волновода, а взаимодействие проявляется в интерференции отдельных мод сложного световода; 2) определяются моды каждого простого световода в отдельности, а перекрестные помехи характеризуются коэффициентом связи.

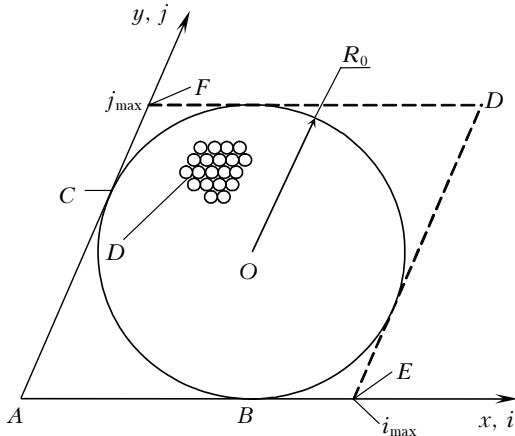
В работе получена система уравнений для амплитуд мод простых световодов в оптических жгутов. Показано, что эта система уравнений относительно амплитуд одинаковых мод может быть сведена на основе метода расщепления по физическим процессам к экономичным схемам расщепления и решена

численно. В пределе большого числа одномодовых световедущих каналов показано, что процесс перекачки энергии между световедущими элементами описывается диффузионным уравнением, где «коэффициент диффузии» будет определяться величиной перекрестных помех. Приступим к рассмотрению сформулированной задачи.

1. Вывод системы разностно-операторных эволюционных уравнений для оптических жгутов

Рассмотрим область $AEDF$ (рисунок), заполненную простыми световодами с диаметром световедущего элемента $d = 2\rho$ (ρ – радиус сердцевинки), диаметром оболочки $D = 3d$. В этом случае световедущие каналы являются маломодовыми световодами. Пусть радиус вписанного в трапецию $AEDF$ круга равен R_0 . Положение световедущих элементов будем характеризовать числами i, j , где

$$x_i = iD; \quad y_j = jD. \quad (1)$$



Расположение световедущих элементов относительно осей AX и AU

Если на вход оптического жгута подается амплитуда поля

$$\Phi(x, y) = \sum_{N, m} \Phi_{N, m}(x, y), \quad (2)$$

то решение будем искать в виде суммы линейных комбинаций собственных функций $\psi_{N, m}(x - iD, y - jD)$ направляемых мод каждого световедущего элемента

$$\Psi(x, y) = \sum_{N, m, i, j} A_{i, j}^{N, m}(z) \Psi_{N, m}(x - iD, y - jD), \quad (3)$$

где в соответствии с (2) и (3)

$$A_{i, j}^{N, m}(z = 0) = \iint \Psi_{N, m}^*(x - iD, y - jD) \Phi_{N, m}(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Для коэффициентов $A_{i, j}^{N, m}$ из (3) получим систему эволюционных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_{i, j}^{N, m}}{\partial z^2} + \beta_{N, m}^2 A_{i, j}^{N, m} + \sum_{\tilde{N}, \tilde{m}} \left(\Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i-1, j) A_{i-1, j}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \right. \\ & + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i-1, j+1) A_{i-1, j+1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i, j+1) A_{i, j+1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \\ & + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i+1, j) A_{i+1, j}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i+1, j-1) A_{i+1, j-1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \\ & \left. + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i, j-1) A_{i, j-1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} \right) = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i, j) = \frac{k^2 \iint \Psi_{N, m}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\tilde{N}, \tilde{m}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}) (n^2 - n_{ij}^2) dx dy}{\iint |\Psi_{N, m}|^2 dx dy}; \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = (iD, jD);$$

$$n^2 - n_{ij}^2 = \begin{cases} n_{co}^2 - n_{cl}^2, & 0 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}| \leq \rho, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{R}_{ij}| > \rho. \end{cases}$$

Полученная система уравнений может быть решена с помощью метода расщепления по физическим процессам [6], в соответствии с которым в (5) коэффициенты $A_{i, j}^{N, m}$ вычисляются по неявной схеме, а коэффициенты $A_{i, j}^{\tilde{N}, \tilde{m}}$ берутся с явного слоя. Из (5) видно, что такая система уравнений представляет собой систему разностных уравнений с семиточечным шаблоном.

Разностно-операторная система уравнений (5) гиперболического типа может быть записана в виде разностно-операторной системы уравнений параболического типа в результате выделения в решении быстроосциллирующей части $A_{i, j}^{N, m} \sim \exp(i\beta z)$:

$$\begin{aligned} & 2i\beta \frac{\partial A_{i, j}^{N, m}}{\partial z} + (\beta_{N, m}^2 - \beta^2) A_{i, j}^{N, m} + \\ & + \sum_{\tilde{N}, \tilde{m}} \left\{ \left(\Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i-1, j) A_{i-1, j}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i-1, j+1) A_{i-1, j+1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} \right) + \right. \\ & + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i, j+1) A_{i, j+1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i+1, j) A_{i+1, j}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \\ & \left. + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i+1, j-1) A_{i+1, j-1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} + \Lambda_{\tilde{N}, \tilde{m}}^{N, m}(i, j-1) A_{i, j-1}^{\tilde{N}, \tilde{m}} \right\} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Эта система уравнений также может быть решена с помощью метода расщепления по физическим процессам и также представляет собой систему разностных уравнений с семиточечным шаблоном.

2. Вывод системы эволюционных уравнений параболического и гиперболического типа для жгутов с одномодовыми световедущими каналами

Система уравнений позволяет получить уникальные теоретические результаты. Пусть оптический жгут

состоит из одномодовых световедущих элементов. В этом случае существуют только основная мода и соответственно один элемент $\Lambda_{\tilde{N},\tilde{m}}^{n,m}(i,j)$. Пусть

$$\Lambda_{\tilde{N},\tilde{m}}^{n,m}(i,j) = \Lambda, \quad A_{i,j} = A_{i,j}^{\tilde{N},\tilde{m}}, \quad \beta_{\tilde{N},\tilde{m}}^2 = \beta_0^2. \quad (8)$$

Тогда (5) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 A_{i,j}}{\partial z^2} + \beta_0^2 A_{i,j} + \Lambda(A_{i-1,j} + A_{i-1,j+1} + A_{i,j+1} + A_{i+1,j} + A_{i+1,j-1} + A_{i,j-1}) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой разностно-операторное уравнение. Выражение в скобках является аппроксимацией какого-то оператора в неортогональной системе координат (см. рисунок). Покажем, что выражение в скобках может быть представлено через разностный оператор Лапласа в двумерной области.

Пусть i отсчитывается вдоль оси OX , а j — вдоль оси OY , причем угол между осями (см. рисунок) равен $\pi/3$. В соответствии с известными из курса дифференциальной геометрии [7] формулами получим, что метрический тензор g_{nm} , лапласиан Δ и определитель метрического тензора в криволинейной системе координат x и y равны:

$$g_{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{nm} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = 1,$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\sqrt{g} g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \frac{4}{3} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial(y)^2} \right\}. \quad (10)$$

Для того чтобы доказать, что выражение во вторых скобках представляет собой разностный оператор Лапласа в двумерной области, совместим начало декартовой системы x^1 и x^2 координат с точкой (i, j) , ось x^1 направим через точку $(i+1, j+1)$, а ось x^2 — через точку $(i-1, j+1)$. При таком выборе декартовой системы координат получим

$$A_{i-1,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i+1,j-1} = D^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} A \right\} + \Theta(D^4), \quad (11)$$

где $A = A(x^1, x^2)$; $\Theta(D^4) \sim D^4$.

Между координатами x и y (см. рисунок) и координатами декартовой системы координат будет следующая связь:

$$x^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \text{const}, \quad x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \text{const}. \quad (12)$$

Из (12) следует:

$$\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(y)^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2.$$

Из (11) окончательно получим

$$\begin{aligned} & A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j} = \\ & = D^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(y)^2} \right\} A(x^1, x^2) = \\ & = \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \right\} A(x^1, x^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (11) и (14), для выражения в скобках (9) запишем:

$$\begin{aligned} & A_{i-1,j} + A_{i-1,j+1} + A_{i,j+1} + A_{i+1,j} + A_{i+1,j-1} + A_{i,j-1} = \\ & = 6A_{i,j} + \frac{3}{2} D^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} \right\} A(x^1, x^2). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (15) уравнение (9) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial \tilde{z}^2} + \Delta_{\perp} A + k_0^2 A = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \text{двумерный лапласиан}; \\ k_0^2 &= \xi^2 (\beta_0^2 + 6\Lambda); \quad z = \xi \tilde{z}; \\ \xi &= \left(\frac{2}{3\Lambda} \right)^{1/2} \frac{1}{D}; \quad k_0 = \xi \beta. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, амплитуда поля в оптическом жгуте, состоящем из одномодовых световедущих элементов, удовлетворяет уравнению Гельмгольца (16), т.е. стационарному волновому уравнению.

Соответственно с помощью уравнения (7) для оптического жгута, состоящего из одномодовых световедущих элементов, эволюционное уравнение для амплитуды поля может быть записано в виде параболического (диффузионного) уравнения

$$2i\beta \frac{\partial A(x,y)}{\partial z} + \frac{3}{2} \Lambda D^2 \Delta_{\perp} A(x,y) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, решение амплитуды поля в оптическом жгуте, состоящем из одномодовых световедущих элементов, может быть найдено из решения диффузионного уравнения (18).

3. Методы решений эволюционных уравнений

Как указывалось выше, систему уравнений для коэффициентов $A_{i,j}^{n,m}$ в случае оптического жгута с мало- или многомодовыми световедущими каналами можно решить в общем случае численно, например методом расщепления физических процессов. Ситуация меняется для одномодовых световедущих каналов. В этом случае существует большой класс аналитически решаемых методов. И для уравнения Гельмгольца

ца (16) можно воспользоваться хорошо известным в математической физике и широко используемым в оптике методом функции Грина, когда решение в данной точке может быть выражено через поверхностные интегралы от исходного волнового фронта [8]. В самом методе функции Грина существует большой класс аналитически решенных в соответствии с теорией дифракции света задач, например дифракция света на границе непрозрачной полуплоскости. В случае параболического уравнения (18) также существует большой класс аналитически решенных задач, в том числе методом функции Грина.

Уравнение (18) при наличии мощных современных вычислительных машин может быть решено численно на основе хорошо разработанных и исследованных экономичных разностных схем. Хорошая устойчивость этих схем позволяет довольно легко реализовать эти программы, не привлекая специалистов высокой квалификации. Кроме того, диффузионное уравнение описывает преобразование сферических волновых фронтов в оптической линзе. Для решения уравнения (18) можно использовать преобразование Фурье для поперечных координат и, воспользовавшись далее обратным преобразованием Фурье, получить аналитическое решение.

4. Метод увеличения контрастности изображения и трансляционной длины оптического жгута

Связь между световедущими каналами в оптических жгутах определяется оптическими перекрестными помехами [5]. Описать перекрестные помехи можно двумя способами. В первом случае для вычисления перекачки мощности между световедущими каналами определяются непосредственно моды сложного волновода, а взаимодействие проявляется в интерференции отдельных мод сложного световода. Во втором случае определяются моды каждого простого световода в отдельности, а перекрестные помехи характеризуются коэффициентом связи.

В данной статье для оптических жгутов различной конструкции на основе второго способа из модели попарного взаимодействия простых световодов (световедущие элементы) определена величина K , являющаяся аналогом контрастности. На основе полученных результатов предложен способ увеличения контрастности изображения и трансляционной длины оптического жгута за счет конического утолщения сердцевин световедущих жил в области пространственно неустойчивого режима. Приступим к рассмотрению сформулированных задач.

В квантовой механике существует теорема об адиабатическом изменении параметров квантовой системы ([7. С. 223]), в соответствии с которой в пределе сколь угодно медленно меняющегося со временем возмущения вероятность перехода системы из одного состояния в другое стремится к нулю. Это означает, что если в начальный момент генерируется определенный спектр состояний (для световодов это

означает определенное число мод с определенной долей вероятности), то при адиабатическом возмущении состав спектра не меняется. Поскольку процесс распространения излучения в сложных световодах описывается скалярным волновым уравнением, являющимся, по сути, уравнением Шредингера, где роль времени выполняет продольная координата z , то теореме об адиабатическом возмущении можно применить к световодам.

В данной статье предлагается в качестве адиабатического возмущения использовать плавное увеличение радиуса сердцевин ρ световедущей жилы в оптическом жгуте в зависимости от продольной координаты z . В соответствии с утверждением теоремы об адиабатическом возмущении доля мощности мод в пренебрежении перекрестными помехами не будет меняться. Доля перекачиваемой мощности за счет перекрестных помех определяется как протяженностью области взаимодействия мод, так и интегралом перекрытия взаимодействующих мод. Если протяженность области адиабатического увеличения радиуса сердцевин выбрать небольшой, то перекрестными помехами можно пренебречь, поскольку при увеличении радиуса сердцевин, как это будет показано ниже с помощью численных расчетов, взаимодействие мод за счет перекрестных помех между модами резко уменьшается. Это означает, что если после адиабатического увеличения радиуса сердцевин его величину не менять, то при дальнейшей трансляции сигнала не будет происходить перекачивания мощности за счет перекрестных помех. Исследуем этот вопрос более подробно.

На величину контрастности в оптических жгутах влияет как величина перекачиваемой мощности за счет перекрестных помех, так и генерируемая амплитуда моды простого световода. Поэтому сначала оценим величину амплитуд различных мод в простом световоде.

Пусть на вход лучевода подается гауссовский профиль амплитуды

$$\Psi = \Psi_0 \exp(-\tilde{r}^2 / (2a^2));$$

$$a = \rho\sqrt{N/100}; \quad N = 35\,000; \quad (19)$$

$$\rho = 3 \text{ мкм}; \quad \tilde{r}_{\max} \approx \rho\sqrt{N}.$$

Амплитуда генерируемой моды $m \neq 0$ будет определяться величиной m -й производной Ψ от поперечных координат. Максимальное значение производной от амплитуды входного поля (19) в лучеводе по радиусу достигается при $\tilde{r} = a$. Величина амплитуды генерируемой моды $m \neq 0$ будет пропорциональна $\Psi(\tilde{r} = a)$ и $\sim (\rho/a)^m \ll 1$. Соответственно доля приходящейся на моду $\Psi_{N,m}$ мощности пропорциональна $\sim (\rho/a)^{2m} = (100/N)^m$. При $N = 35\,000$ для $m = 1$ получим $(\rho/a)^{2m} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ (при $m > 1$ это число будет еще меньше). Поэтому в дальнейшем для достаточной гладкой функции входного сигнала Ψ будем учитывать только моды $m = 0$, а модами $m \geq 1$ пренебрежем.

Взаимодействие между световедущими каналами в сложном световоде характеризуется величиной K , являющейся аналогом контрастности:

$$K = (W_1 - W_2)/W_1, \quad (20)$$

где величины $W_1(z)$ и $W_2(z)$ для мод с $m = 0$ определяются как

$$W_2(z) = W_0 \sin^2 \{ \Lambda z / (2\beta_{N=1,m=0}) \},$$

$$W_1(z) = W_0 - W_2(z), \quad (21)$$

где

$$W_0 = \iint_{\text{серд.}} |\Psi_{N=1,m=0}(r, \varphi, z)|^2 r dr d\varphi. \quad (22)$$

В (21) величина Λ характеризует перекрестные помехи и вычисляется в соответствии со следующими формулами:

$$\Lambda = \sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{21}}, \quad \Lambda_{21} = \frac{k^2 \iint \Psi_2^* \Psi_1 (n^2 - n_2^2) dx dy}{\iint |\Psi_2|^2 dx dy},$$

$$\Lambda_{12} = \frac{k^2 \iint \Psi_1^* \Psi_2 (n^2 - n_1^2) dx dy}{\iint |\Psi_1|^2 dx dy}, \quad (23)$$

где в Λ_{21} имеет место

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m}^I(\mathbf{r}), \quad \Psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m}^{II}(\mathbf{r} - \mathbf{R}),$$

а в Λ_{12}

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m}^{III}(\mathbf{r}), \quad \Psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m}^{IV}(\mathbf{r} - \mathbf{R}).$$

В (23) введены обозначения

$$n^2 - n_2^2 = \begin{cases} n_{co}^2 - n_{cl}^2, & 0 \leq r \leq \rho, \\ 0, & r > \rho, \end{cases} \quad (24)$$

$$n^2 - n_1^2 = \begin{cases} n_{co}^2 - n_{cl}^2, & 0 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{R}| \leq \rho, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{R}| > \rho. \end{cases}$$

Видно, что при нормировке в (23) волновых функций на единицу в соответствии с (23) $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}^*$. И в этом случае будем иметь

$$\Lambda = |\Lambda_{21}| = |\Lambda_{12}|. \quad (25)$$

В таблице приведены значения $K_{N,N}$ попарного взаимодействия мод N и $m = 0$, вычисленных в соответствии с (20) (индекс N у $K_{N,N}$ указывает на величину радиального квантового числа взаимодействующих мод); период полной перекачки L мощности моды из одной сердцевинки в другую в сложном двухжильном световоде; величина Λ из (23) характеризует величину перекрестных помех. Для расчетов, приведенных в таблице:

$$\Psi_{N,m}^I(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m}^{III}(\mathbf{r}) = \Psi_{N,m=0}(\mathbf{r}),$$

$$\Psi_{N,m}^{II}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \Psi_{N,m}^{IV}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \Psi_{N,m=0}(\mathbf{r} - \mathbf{R}).$$

Теперь предположим, что световедущие элементы в оптическом жгуте с радиусом сердцевинки $\rho = 2$ мкм адиабатически переходят в световедущие элементы с радиусом $\rho = 3$ мкм. В этом случае в соответствии с известной в квантовой механике адиабатической теоремой [7] волновая функция основной моды $\Psi_{N=1,m=0}$ адиабатически перейдет в волновую функцию такой же моды, но с другой сердцевинкой. В соответствии с таблицей в этом случае контрастность между направляемыми модами (в таблице обозначена как $K_{N=1,N=1}$) будет равняться практически единице, поскольку увеличение оптического объема приводит к уменьшению перекрестных помех. Это улучшает характеристики оптического жгута, но зато появляется альтернативный эффект, ухудшающий его характеристики.

В результате увеличения оптического объема за счет увеличения радиуса сердцевинки появляется другая направляемая мода $\Psi_{N=2,m=0}$ (см. таблицу), в результате чего, во-первых, становится возможно взаимодействие основной моды одной сердцевинки с другой направляемой модой $\Psi_{N=2,m=0}$ в соседней сердцевинке и, во-вторых, сильное взаимодействие амплитуд мод $\Psi_{N=2,m=0}$ между собой (в таблице контрастность между этими направляемыми модами обозначена как $K_{N=2,N=2}$ и при $\rho = 3$ мкм равна 0,68). Поскольку в световоде с $\rho = 2$ мкм отсутствует мода $N = 2, m = 0$ (эта мода является вытекающей и по этому быстро исчезает из сердцевинки), то при $\rho = 3$ мкм такая мода может появиться только в результате взаимодействия с основной модой за счет перекрестных помех. Но проведенные численные расчеты показывают, что при таком взаимодействии

ρ , мкм	5	4,5	4	3,2	3,1	3	2
$K_{N=1,N=1}$	1	1	1	1	1	1	0,97
Λ , мкм ⁻²	$1,33 \cdot 10^{-17}$	$6,33 \cdot 10^{-16}$	$3,19 \cdot 10^{-14}$	$1,95 \cdot 10^{-11}$	$4,43 \cdot 10^{-11}$	$1,01 \cdot 10^{-10}$	$5,03 \cdot 10^{-7}$
L , м	$3,4 \cdot 10^{12}$	$7,2 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^9$	$2,3 \cdot 10^6$	$1,03 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	90,4
$K_{N=2,N=2}$	1	1	1	0,997	0,97	0,68	
Λ , мкм ⁻²	$8,37 \cdot 10^{-15}$	$6,6 \cdot 10^{-13}$	$6,27 \cdot 10^{-11}$	$1,71 \cdot 10^{-7}$	$4,98 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-6}$	
L , м	$5,4 \cdot 10^{15}$	$6,9 \cdot 10^7$	$7,3 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^2$	91,5	30,5	
$K_{N=3,N=3}$	1	0,85					
Λ , мкм ⁻²	$1,27 \cdot 10^{-9}$	$1,07 \cdot 10^{-6}$					
L , м	$3,6 \cdot 10^4$	42,7					

Примечание. $NA = 10^0$; $m = 0$; $n_{co} = 1,46$, $n_{cl} = 1,44953$; $R = 6\rho$; $z = 107$ мкм; $\lambda = 0,63$ мкм.

$\Lambda = 1,58 \cdot 10^{-8} \text{ мкм}^{-2}$. Поскольку $\beta_{N=1,m=0}^2 - \beta_{N=2,m=0}^2 \gg \Lambda$, то максимальное значение контрастности K_{\max} из (20) можно записать в виде

$$K_{\max} \approx 4\Lambda^2 / (\beta_{N=1,m=0}^2 - \beta_{N=2,m=0}^2) \approx 5,6 \cdot 10^{-16}.$$

Это означает, что генерации моды $N = 2$, $m = 0$ в результате взаимодействия с основной модой за счет перекрестных помех практически не будет происходить. А это, в свою очередь, означает, что при адиабатическом утолщении световедущих каналов $\rho = 2 \text{ мкм} \rightarrow \rho = 3 \text{ мкм}$ характеристики оптического жгута ухудшаться не будут. Из приведенных расчетов видно, что после утолщения световода с $\rho = 3 \text{ мкм}$ характер распространения излучения будет практически одномодовым (будет отсутствовать мода $N = 2$, $m = 0$).

Следует отметить, что аналогичная ситуация в соответствии с таблицей реализуется при адиабатическом переходе $\rho = 2 \text{ мкм} \rightarrow \rho = 3,1 \text{ мкм}$, только в этом случае $K_{N=2,N=2} = 0,97$. В случае $\rho = 2 \text{ мкм} \rightarrow \rho = 3,2 \text{ мкм}$ будет $K_{N=2,N=2} = 1$, но при этом появляется направляемая мода $N = 2$, $m = 1$ (эта мода также не ухудшает характеристики оптического жгута). Реализуются аналогичные рассмотренной выше задаче условия при адиабатическом переходе $\rho = 4,5 \text{ мкм} \rightarrow \rho = 5 \text{ мкм}$ для моды $N = 3$, $m = 0$.

Заключение

Для амплитуды поля и жгута с произвольными световедущими каналами получена система разностных эволюционных уравнений, где роль узлов схемы выполняют центры световедущих каналов. Несложно показать, что исходная система разностных уравнений легко сводится к системе дифференциальных уравнений (Гельмгольца или параболического типа), которая по усмотрению исследователя может быть решена на других сетках.

Показано, что амплитуда поля в оптическом жгуте, состоящем из одномодовых световедущих элемен-

тов, удовлетворяет либо уравнению Гельмгольца (16), либо диффузионному уравнению (18).

Уравнение Гельмгольца (16) позволяет воспользоваться хорошо разработанным методом функции Грина. Диффузионное уравнение (18) является очень удобным для оценки величины контрастности. Действительно, во-первых, исходя из функции Грина, для уравнения (18) можно определить величину среднеквадратического a^2 увеличения исходного сигнала ($a^2 \sim z$). Во-вторых, для (18), используя прямое и обратное преобразования Фурье, можно получить довольно большой класс аналитических решений. В-третьих, уравнение (18) может быть решено численно на основе экономичных схем [6].

Предсказано и непосредственно численными расчетами подтверждено, что адиабатическое (коническое) увеличение радиуса сердцевины световедущих элементов в области пространственно неустановившегося режима улучшает контрастность.

Работа выполнена по проекту РФФИ (№ урчел 04-02-96039).

1. Кацуяма Т., Мацумура Х. Инфракрасные волоконные световоды. М.: Мир, 1992. 256 с.
2. Nakamura M., Kitayama K. Skew Characteristics of Image Fiber for High-Speed 2-D Parallel Optical Data Link // J. Lightwave Technol. 2000. V. 18. N 9. P. 1214–1219.
3. Tang Q., Zhao Y. Measurement and modeling of the optical transfer function for silica multicore image fibers // Appl. Opt. 1992. V. 31. N 28. P. 6011–6014.
4. Chiarulli D., Levitan S., Derr P., Hofman R., Greiner B., Robinson M. Demonstration of multichannel optical interconnection by use of imaging fiber bundles butt coupled to optoelectronic circuits // Appl. Opt. 2000. V. 39. N 5. P. 698–703.
5. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических световодов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 146 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 703 с.
8. Солименко С., Крозильяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989. 664 с.

M.O. Sadykova, N.R. Sadykov, I.E. Parshukov, A.N. Afanasyev. The derivation of the system of evolutionary equations for optical bundles.

The system of evolutionary differential equations describing the propagation of radiation is received subject to relation factors between imaging fiber elements in optical bundles. It is shown, that in optical bundles consisting of single-mode imaging fiber elements, the field amplitude in transverse section of bundle satisfies parabolic (diffusion) or Helmholtz equation. The diffusivity is defined by center-to-center distance of lightguide cores and by integral of overlapping of interacting modes. For few-mode and multimode lightguide channels the system of equation may be resolved with the help of a method of physical processes splitting.

The problem of influence of adiabatic (conic) increase of core radius of imaging fiber elements for spatially unsteady regime on the value of contrast is considered. On the basis of model of pairwise interaction of imaging fiber elements the parameters of transmitting function in optical bundles are calculated from the analysis of cross noise. The influence of polarizing correction of propagation constants of simple imaging fiber on parameters of transmitting function is estimated from the results of numerical calculations.