

К.В. Шишаков, В.И. Шмальгаузен

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ АТМОСФЕРНЫХ АБЕРРАЦИЙ ГИБКИМИ ЗЕРКАЛАМИ

Изучена коррекция нестационарных атмосферных aberrаций адаптивной оптической системой фазового сопряжения с учетом динамических характеристик гибких зеркал. Проанализированы субоптимальные законы управления зеркалами при коррекции фазовых искажений по первым десяти полиномам Цернике.

Повышение быстродействия адаптивных оптических систем, работающих в условиях турбулентной атмосферы, является актуальной задачей [1]. Один из методов ее решения состоит в улучшении характеристик контура управления гибкими зеркалами.

В зависимости от величины характерного времени изменения атмосферных aberrаций различают «квазистатическую» и динамическую системы коррекции [2]. Если в первом случае достаточно исследования статических деформаций зеркал [3], то во втором необходимо рассматривать корректор волнового фронта как инерционную систему с распределенными параметрами [4, 5]. Из-за сложности анализа последней задачи алгоритмы управления гибкими зеркалами и динамические характеристики адаптивных оптических систем часто изучаются независимо. Динамическое поведение атмосферных aberrаций обычно моделируется с помощью полиномов Цернике [6–8], а система управления строится для задачи демпфирования собственных мод колебаний гибкого зеркала [5].

В настоящей статье рассматривается анализ динамической коррекции атмосферных aberrаций гибкими зеркалами в адаптивных системах фазового сопряжения. Изучаются следующие вопросы: 1) расчет линейного формирующего фильтра для описания динамики фазовых искажений; 2) выбор модели корректора волнового фронта; 3) синтез субоптимального управления адаптивными зеркалами.

1. Рассмотрим первую задачу. Корреляционные функции коэффициентов разложения  $\xi_i(t)$  волнового фронта  $\phi(\mathbf{r}, t)$  по полиномам Цернике  $Z_i(\mathbf{r})$  для колмогоровской модели атмосферной турбулентности определяются следующими известными выражениями [8]:

$$K_i(\tau) = \langle \xi_i(t) \xi_i(t + t_0) \rangle = c_i \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^\infty [J_0(v\tau) \pm (-1)^m J_{rm}(v\tau) \cos 2m\phi] J_{n+1}^2(v) v^{-14/3} dv, \quad (1)$$

где  $\tau = 2Vt_0/D$ ;  $D$  — диаметр апертуры;  $(V, \psi)$  — полярные координаты средней скорости переноса неоднородностей;  $r_0$  — радиус корреляции Фрида;  $J_\kappa$  — функции Бесселя  $\kappa$ -го порядка;  $c_i$  — нормировочные постоянные;  $n$  — порядок полинома;  $m$  — его угловая частота; знак «+» отвечает четным  $i$ , знак «-» — нечетным.

Выражения (1) не позволяют использовать методы проектирования оптимальных линейных следящих систем [9]. Поэтому с учетом характерного профиля функций  $K_i(\tau)$  будем аппроксимировать их следующими выражениями:

$$\tilde{K}_i(\tau) = \langle \xi_i^2 \rangle e^{-\alpha_i \tau}, \quad i \leq 3, \quad (2)$$

$$\tilde{K}_i(\tau) = \langle \xi_i^2 \rangle e^{-\alpha_i \tau} \left( \cos \gamma_i \tau + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \sin \gamma_i \tau \right), \quad i > 3, \quad (3)$$

позволяющими обеспечить достаточную точность аппроксимации и отвечающими линейным формирующим фильтрам низших порядков [10]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i + \alpha_i \xi_i &= \zeta_i, \quad i \leq 3; \\ \ddot{\xi}_i + 2\alpha_i \dot{\xi}_i + (\alpha_i^2 + \gamma_i^2) \xi_i &= \zeta_i, \quad i > 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\dot{\xi}_i = \frac{d}{d\tau} \xi_i$ ;  $\zeta_i$  — белые шумы со спектральными функциями

$$S_i^{\zeta} = \langle \dot{\xi}_i^2 \rangle \alpha_i / \pi, \quad i \leq 3;$$

$$S_i^2 = 2 \langle \xi_i^2 \rangle \alpha_i (\alpha_i^2 + \gamma_i^2) / \pi, \quad i > 3. \quad (5)$$

Постоянные коэффициенты  $\alpha_i$  в выражениях (2) будем определять из задачи минимизации ошибок  $\epsilon_i$  на некоторых временных интервалах  $[0, T_i]$ :

$$\epsilon_i = \int_0^{T_i} [K_i(\tau) - \tilde{K}_i(\tau)]^2 d\tau / \int_0^{T_i} K_i^2(\tau) d\tau. \quad (6)$$

При этом будем считать, что отличие функций  $K_i$  и  $\tilde{K}_i$  при  $\tau > T_i$  влияет только на низшие частоты атмосферных aberrаций, которые не вносят заметного вклада в динамическую ошибку адаптивной системы. В выражениях (3) коэффициенты  $\alpha_i, \gamma_i$ , вычислим в соответствии с известной методикой [10]: полагая  $K_i(T_i) = \tilde{K}_i(T_i) = 0$  для первого корня  $T_{1i}$ , получим  $\alpha_i = -\gamma_i \text{ctg} \gamma_i T_{1i}$ ; оставшийся параметр  $\gamma_i$ , определяется из задачи минимизации ошибок (6).

Вычисленные значения коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\gamma_i$  при совпадении направления скорости переноса неоднородностей с осью  $\psi = 0$  приведены в табл. 1, где обозначено  $\sigma_i = \langle \xi_i^2 \rangle (r_0 / D)^{5/3}$ .

Таблица 1

$i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_i$	0,449	0,449	0,023	0,023	0,023	0,006	0,006	0,006	0,006
$\alpha_i$	0,13	0,08	1,64	1,02	2,62	1,94	0,99	2,49	0,99
$\gamma_i$	—	—	1,88	2,04	0	1,80	3,79	3,24	3,28
$T_{1i}$	—	—	1,2	1,0	—	1,3	0,5	0,7	0,7
$T_i$	20	20	4	4	4	2	2	2	2
$\epsilon_i$	0,09	0,02	0,003	0,02	0,02	0,002	0,05	0,09	0,03

2. Перейдем к задаче описания модели адаптивной системы фазового сопряжения. Изучим систему, в которой измерительное устройство осуществляет разложение остаточной пространственной ошибки  $\varphi - \tilde{W}$  ( $\tilde{W}$  — корректирующая функция) в ряд по первым десяти полиномам Цернике  $Z_i$ :  $\varphi(\mathbf{r}, t) - \tilde{W}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{10} a_i(t) Z_i(\mathbf{r})$ , где  $a_i$  — сигналы измерения. Будем считать, что коррекция средней фазы и средних наклонов волнового фронта осуществляется с достаточной степенью точности дополнительным зеркалом, имеющим более высокие резонансные частоты по сравнению с частотами гибкого зеркала. В этом случае представим корректирующую функцию  $\tilde{W}$  в виде  $\tilde{W} = \sum_{i=1}^3 a_i(t) Z_i(\mathbf{r}) + W(\mathbf{r}, t)$ , где  $W$  — поверхность круглого гибкого зеркала, описываемая известным уравнением [2]:

$$\left[ \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial}{\partial t} + L \right] W(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Здесь  $\sigma_m$  — масса единицы поверхности;  $\mu$  — коэффициент демпфирования;  $q$  — управляющая нагрузка;  $L$  — оператор статической деформации зеркала. Для пластинчатых зеркал  $L = G_3 \nabla^4$ , где  $G_3$  — цилиндрическая жесткость. При этом для  $i \leq 10$  выполняются условия  $Lz_i = 0$ ; поэтому в задачах оптимальной квазистатической коррекции низших aberrаций управляющие приводы целесообразно выносить за пределы активной апертуры  $\Omega$  [3]. Такое расположение приводов не позволяет организовать эффективное подавление высоких пространственных частот колебаний зеркала [5], поэтому в системах коррекции низших aberrаций целесообразно использовать пассивные методы демпфирования высших мод колебаний. При этом будем считать, что полоса рабочих частот системы  $\Delta\nu$  не превышает низшей собственной частоты зеркала  $\lambda_1$ :

$$\Delta\nu < \lambda_1. \quad (8)$$

В этом случае представим управляющую нагрузку в виде  $q(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=4}^{10} U_i(t) q_i(\mathbf{r})$ , где  $U_i$  — сигналы управления;  $q_i(\mathbf{r})$  — статическое распределение усилий от приводов при аппроксимации полиномов

$Z_i(\mathbf{r})$  ( $U_i^{\text{ст}} = 1$ ,  $LZ_i = q_i$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega$ ). Так как круговые полиномы  $Z_i$  ( $i = \overline{4, 10}$ ) являются независимыми гармоническими функциями относительно угла  $\theta$  [1], отвечающие им каналы коррекции можно изучать отдельно, оставляя в разложении функций  $W(\mathbf{r}, t)$  и  $q_i(\mathbf{r})$  ( $i \leq 10$ ) только моды колебаний  $V_j(\mathbf{r})$ , имеющие ту же угловую зависимость. При этом уравнение (7) для каждого канала управления переписывается в виде (индекс  $i$  везде будем опускать)

$$\sigma_M \ddot{f}_j + 2\mu \dot{f}_j + \lambda_j^2 f_j = U(t) C_j \lambda_j^2, \quad j = 1, l; \quad l \gg 1, \quad (9)$$

где

$$\dot{f}_j = \frac{d}{dt} f_j, \quad W \simeq \sum_{j=1}^l f_j(t) V_j(\mathbf{r}), \quad q \simeq \sum_{j=1}^l C_j \lambda_j^2 V_j(\mathbf{r}), \quad LV_j = \lambda_j^2 V_j.$$

Хорошо видно, что в квазистатическом приближении коэффициенты  $C_j$  равны значениям  $f_j^{\text{ст}}$  ( $U^{\text{ст}} = 1$ ). Поэтому определим их из минимизации ошибки статической аппроксимации  $\left\| Z - \sum_{m=1}^3 K_m Z_m - \sum_{j=1}^l C_j V_j \right\|^2$  на области активной апертуры (здесь коэффициенты  $K_m$  введены для выделения аберраций  $Z_m$ ,  $m \leq 3$ ). Наиболее простые выражения для  $C_j$  соответствуют случаю, когда область зеркала совпадает с  $\Omega$  (например, в пластинчатых зеркалах со свободным краем). С учетом свойств ортонормированности мод колебаний [2]  $(V_i, V_j) = \delta_{ij}$  можно получить

$$C_j = (Z, V_j) + \frac{1}{S_0} \sum_{m=1}^3 (Z_m, V_j) \frac{\sum_{i=1}^l (Z, V_i) (Z_m, V_i)}{1 - \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^l (Z_m, V_i)^2}, \quad (10)$$

где  $(Z_i, Z_j) = S_0 \delta_{ij}$ ,  $S_0 = \pi D^2/4$ .

Таким образом, уравнение (9) и измеряемая ошибка коррекции определяют линейную модель системы компенсации функции  $\xi(t)Z(\mathbf{r})$ .

3. Изучим задачу синтеза регулятора  $U(a)$ . В соответствии с методами теории линейных систем автоматического регулирования перейдем от уравнений (9), (11) к их спектральному представлению

$$f(s) = \tilde{U}(s)/A_1(s), \quad \tilde{U}(s) = U(s) \left[ 1 + \sum_{j=2}^l A_1(s)/A_j(s) \right], \quad (12)$$

где  $A_j(s) = (\sigma_M s^2 + 2\mu s + \lambda_j^2) S_0 / C_j \lambda_j^2 (z, V_j)$ ,  $s$  — обозначает оператор Лапласа; выделение передаточной функции  $A_1(s)$  оправдано сделанным ранее предположением (8), при выполнении которого резонансный множитель можно учитывать только в этом члене. При этом синтезированная система окажется оптимальной только относительно низших мод каждого канала.

Тогда уравнения следящей системы (4), (11) примут вид

$$A_1(s) a \simeq -\tilde{U} + A_1(s) \xi, \quad B(s) \xi = \zeta, \quad (13)$$

где  $B(s) = (\kappa s)^2 + 2\alpha(\kappa s) + \alpha^2 + \gamma^2$ ,  $\kappa = 2V/D$ ,  $\xi$  — белый шум со спектральной плотностью  $S_\xi = \text{const}$ .

Известно [9], что регулятор, минимизирующий функционал

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (M^2 a^2 + \tilde{U}^2) dt = M^2 \langle a^2 \rangle + \langle \tilde{U}^2 \rangle \quad (14)$$

с весовым множителем  $M^2$ , определяется выражением

$$\tilde{U}^* = -D^*(s) a, \quad D^*(s) = A_1(s) \left[ 1 - \frac{S_\xi^{1/2} G(s)}{B(s) M_+(s)} \right]. \quad (15)$$

Здесь полином  $G(s)$  и дробная функция  $M_+(s)$  находятся из условий

$$M^2 + A_1(s) A_1(-s) = G(s) G(-s),$$

$$S_{\zeta}^{1/2} \frac{A_1(s) A_1(-s)}{B(s) G(-s)} = M_+(s) + M_-(s), \quad (16)$$

где  $M(s)$  — правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

Регулятор (15) синтезирован с учетом известной спектральной функции корректируемого случайного процесса. В реальных ситуациях такая информация может отсутствовать. В этом случае обычно полагают  $B(s) = A_1(s)$ , что приводит к более простому выражению для

$$D^*(s) = A_1(s) - G(s) \quad (17)$$

Отметим, что такой регулятор соответствует задаче синтеза стабилизатора при возмущениях типа белого шума [9].

Полученные выражения (15), (17) удовлетворяют известным условиям устойчивости следящих систем к малым возмущениям параметров [9]. Кроме этого, здесь легко можно представить в аналитическом виде [11] дисперсии величин

$$\frac{\langle a^2 \rangle}{S_{\zeta}} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{|W_a(i\omega)|^2}, \quad \frac{\langle \tilde{U}^2 \rangle}{S_{\zeta}} = \int_0^{\infty} \frac{|D^*(i\omega)|^2}{|W_a(i\omega)|^2} d\omega, \quad (18)$$

где  $W_a(s) = [A_1(s) - D^*(s)]B(s)/A_1(s)$ .

Приведем результаты расчетов характеристик адаптивной системы с гибкими пластинчатыми зеркалами со свободным краем. Собственные частоты  $\lambda_j^2$  и формы  $V_j(\mathbf{r})$  круглой пластины при коэффициенте Пуассона 0,33 приведены в справочнике [12]. Вычисленные значения  $1/S_0(Z, V_j)$  ( $i = 4, 10$ ) содержатся в табл. 2. При этом получалось  $|1 - C_j(Z, V_j)| \leq 0,01$ , что свидетельствует о практической возможности пренебрежения вторым слагаемым в (10). Из таблицы видно, что в выражениях (12) для рабочих частот адаптивной системы, удовлетворяющих условию  $\sigma_M s^2 < \lambda_i^2$ , в силу малости величин  $C_j(Z, V_j)/S_0$  ( $j \geq 2$ ) можно положить  $\tilde{U}(s) = U(s)$ .

Таблица 2

$i/j$	$(D/2)(\lambda_j/G_3^{1/2})^{1/2}$					$C_j(Z_i, V_j)/S_0$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	3,0	6,2	9,4	12,5	15,7	0,986	0,013	$10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$
5,6	2,3	5,9	9,2			0,998	0,0018	$8 \cdot 10^{-6}$		
7,8	4,6	7,7	10,9	14,1	17,2	0,939	0,047	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$
9,10	3,5	7,3	10,6			0,992	0,0069	$10^{-4}$		

Рассчитанные зависимости относительной ошибки коррекции  $\langle a^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle$  от энергетических затрат управления  $\langle \tilde{U}^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle$  при  $\mu = 0$  приведены на рисунке. На нем сплошные кривые соответствуют регулятору (15), прерывистые — регулятору (17), параметр  $K = \kappa / [4\sigma_M^{1/2} / D^2 G_3^{1/2}] = 0,5DV(\sigma_M / G_3)^{1/2}$ . Отсюда следует два вывода. Во-первых, учет спектральных функций корректируемых атмосферных aberrаций позволяет примерно в 1,5–2 раза уменьшить ошибку коррекции. Во-вторых, в таких системах с некоторыми дополнительными затратами управления можно использовать оптимальные регуляторы систем стабилизации.

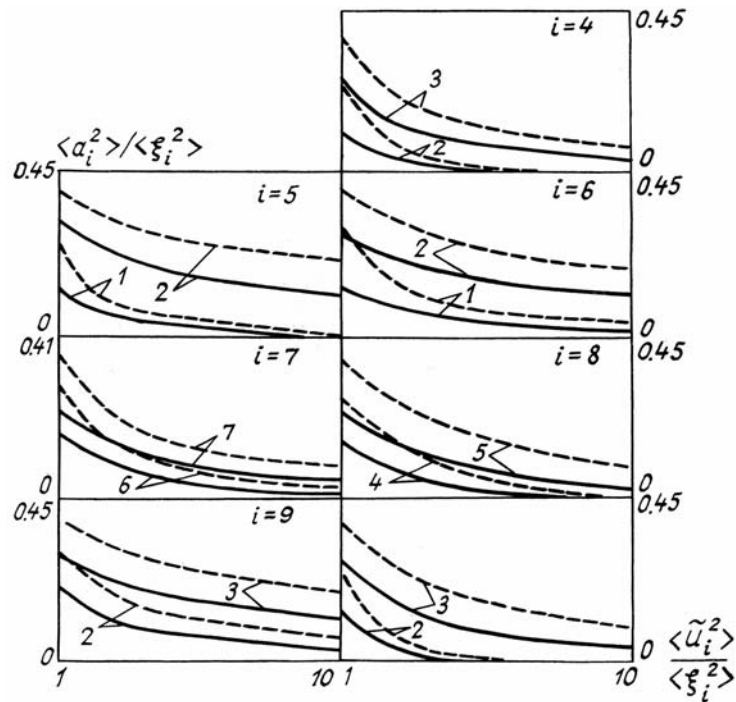
В заключение сделаем несколько замечаний относительно синтеза управления в системах коррекции с рабочими частотами, превышающими низшие частоты колебаний гибких зеркал. В этом случае для эффективного подавления собственных резонансных колебаний зеркала приводы управления необходимо размещать по всей его поверхности [5] и синтезировать регулятор для исходной модели системы (9), (11). Записать закон управления непосредственно в явном виде позволяет метод синтеза оптимальных регуляторов по критерию обобщенной работы. Опуская все промежуточные вычисления, проводимые в соответствии со стандартной методикой [13], можно показать, что в задаче синтеза стабилизатора минимизация функционала обобщенной работы

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^l (k_{1j}^2 f_j^2 + 2k_{2j}^2 \dot{f}_j^2) + U^2 + U^{*2} \right\} dt \quad (19)$$

достигается на управлениях следующего вида:

$$U^* = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l C_j \{k_{1j}^2 f_j + k_{2j}^2 (1 + \lambda_j^2) \dot{f}_j\}, \quad (20)$$

где  $k_{1j}^2, k_{2j}^2$  – весовые коэффициенты.



Зависимости относительной ошибки коррекции от энергетических затрат управления: 1 –  $K = 3$ ; 2 – 5; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 12; 6 – 15; 7 – 18

В рассматриваемой модели функции  $f_j, \dot{f}_j$  ( $j = \overline{1, l}$ ) не могут быть непосредственно измерены. Поэтому для реализации закона управления (20) их необходимо дополнительно восстанавливать специальными фильтрами, например, с помощью наблюдателя Льюенбергера, фильтра Калмана-Бьюси и др. [14].

Методы решения более общих задач синтеза оптимального управления с минимизацией функционала (14) линейными следящими системами вида (4), (9) с неполной информацией наблюдения описаны в [14]. Все они требуют решения нелинейного матричного уравнения Риккати, что значительно увеличивает объем вычислений.

1. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 156 с.
2. Воронцов М. А., Корябин А. В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988. 272 с.
3. Шишаков К. В., Шмальгаузен В. И. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 3. С. 326.
4. Greedon J. F., Lindgren A. G. // Automatica. 1970. V. 7. № 5.
5. Пузырев В. А., Данилевич А. Б. // Заруб. радиоэлектроника. 1980. № 6. С. 45.
6. Winosur J. // Appl. Opt. 1982. V. 21. № 3. P. 433.
7. Лукин В. П., Покасов В. В. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 5. С. 995.
8. Войцехович В. В. Временные характеристики адаптивной астрономической системы. М., 1984. 23 с. (Препринт / ИКИ АН СССР, № 873).
9. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
10. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.
11. Росин М. Ф., Булыгин В. С. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. М.: Машиностроение, 1981. 312 с.
12. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964. 463 с.

13. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
14. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989.

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
1 июня 1990 г.

**K. V. Shishakov, V. I. Shmal'gauzen. Dynamic Correction for the Atmospheric Aberrations by a Flexible Mirror.**

Correction of nonstationary atmospheric aberrations by an adaptive optical systems of phase conjugation is investigated. Euboptimal laws of monitoring mirrors when correcting for phase distortions using first ten Zernike polynomials are analyzed in the paper.