

А.В. Гайнер, Н.П. Коноплева, Г.И. Сурдутович

**НОВЫЙ МЕХАНИЗМ БИСТАБИЛЬНОСТИ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ  
ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В РЕЗОНАТОРЕ С ВНЕШНЕЙ НАКАЧКОЙ**

Рассмотрена генерация второй гармоники в кольцевом резонаторе с внешней накачкой на основной частоте. Показано, что такая система может быть бистабильной и мультистабильной. Для реализации этих режимов работы необходимо, чтобы приведенная длина нелинейной среды (отношение длины среды к длине преобразования) была достаточно велика ( $\approx 4$ ).

Генерация второй гармоники (ГВГ) в резонаторе с внешней накачкой, внутрь которого помещен нелинейный кристалл, представляет интерес с двух точек зрения. С одной стороны, в резонаторе наряду с повышением эффективности существует возможность управления выходной интенсивностью второй гармоники (ВГ). С другой стороны, пассивный резонатор, содержащий нелинейную среду, представляет нелинейную систему с обратной связью и специфическим механизмом связи волны накачки и ВГ. Поэтому можно ожидать появления новых стационарных (бистабильности [1] и мультистабильности) и нестационарных режимов (например, таких, как самопульсации [2, 3]).

В работах [1–3] рассмотрена ГВГ в пассивном резонаторе с «двойной» обратной связью для полей с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ . При этом использовалось приближение точечной среды, т. е. пренебрегалось эффектами распространения. В настоящей работе мы рассмотрели случай одной обратной связи только для ВГ, но учли изменение амплитуды ВГ в результате взаимодействия, в том числе за счет обратной реакции на волну накачки. Это привело к обнаружению новых, неизвестных ранее режимов.

При решении задачи о ГВГ в резонаторе необходимо знать поведение ВГ при генерации в полубесконечной среде с произвольными значениями комплексных амплитуд на границе. В п. 1 проанализированы основные свойства процесса в зависимости от начальных условий. Результаты аналитических и численных исследований ГВГ в пассивном резонаторе представлены в п. 2. Найдены условия возникновения нескольких стационарных состояний и исследована их устойчивость.

**1. Общие свойства ГВГ без резонатора**

При рассмотрении ГВГ в резонаторе с обратной связью требуются результаты решения задачи о стационарной ГВГ в полубесконечной среде с произвольными начальными условиями на границе среды. В случае точного фазового синхронизма  $\Delta k = 2k_1 - k_2 = 0$  это решение приведено в [4]. Для произвольных значений  $\Delta k$  изменения с расстоянием амплитуды ВГ  $a_2(z)$  и фаз волн с частотами  $\omega$  и  $2\omega - \varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  соответственно имеют вид [5]:

$$a_2^2(z) = E^2 \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m) \right); \quad (1)$$

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(0) - \Delta \sigma E z - \sigma (CE^3 - \Delta E^3) \int_0^z \frac{dz}{E^2 - a_2^2(z)}; \quad (2)$$

$$\varphi_2(z) = \varphi_2(0) + \Delta \sigma E z - \sigma CE^3 \int_0^z \frac{dz}{a_2^2(z)}, \quad (3)$$

где расстояние  $z$  отсчитывается от границы нелинейной среды;  $z_0$  определяется из граничного условия;  $\sigma$  — коэффициент нелинейной связи;  $\Delta = \Delta k / 2\sigma E$  — приведенная отстройка, а параметр эллиптического синуса  $m = (e_2 - e_3) / (e_1 - e_3)$  выражается через корни кубического уравнения (А1, см. Приложение А)  $e_1 > e_2 > e_3$ . Интегралы в выражениях (2), (3) могут быть выражены через эллиптические функции (см. (Б1), (Б2) Приложение Б). Входящие в (1)–(3) величины  $E$  и  $C$  сохраняются при распространении волн в среде [4, 6]:

$$E^2 = a_1^2(z) + a_2^2(z) = a_1^2(0) + a_2^2(0); \quad (4)$$

$$C = \frac{a_1^2(z) a_2(z)}{E^3} \cos \psi(z) + \Delta \frac{a_2^2(z)}{E^2} = \frac{a_1^2(0) a_2(0)}{E^3} \cos \psi(0) + \frac{a_2^2(0)}{E^2}, \quad (5)$$

где  $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$  — разность фаз. Решение (1) описывает периодическое преобразование энергии ВГ в излучение на основной частоте и обратный процесс, за исключением двух случаев. Когда амплитуды волн и разность фаз на границе такие, что  $a_2(0)\cos\psi(0) = \Delta E$  ( $C = \Delta$ ), то вся энергия системы преобразуется во вторую гармонику в пределе  $z \rightarrow \infty$ . Другой пример неперидического поведения — это фазовые центры (см., например, [6]), где амплитуды волн не изменяются с расстоянием. Разность фаз, как следует из (5), тоже является периодической функцией  $z$ . Отметим, что пространственный период

$$T = 2K(m)/\sqrt{e_1 - e_3}\sigma E, \quad (6)$$

где  $K(m)$  — эллиптический интеграл первого рода, а также максимальное и минимальное значения амплитуды ВГ

$$a_{\max} = \left(\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2\right)^{1/2} E, \quad a_{\min} = \left(\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3\right)^{1/2} E \quad (7)$$

зависят, кроме нелинейности и отстройки  $\Delta k$ , от амплитуд волн и разности фаз на границе и однозначно определяются величинами  $E$  и  $C$ . При качественном описании удобно использовать фазовый портрет [6], на котором  $C$  определяет траекторию ( $E = \text{const}$ ). Минимальное значение  $T_{\min} = \pi\sqrt{e_1 - e_3}\sigma E$  достигается в фазовых центрах, где  $m = 0$ ,  $|C| = |C_{\max}|$ . Период  $T$  увеличивается при  $C \rightarrow \Delta$ , т.е. при приближении траектории к сепаратрисе ( $C = \Delta$ ,  $m = 1$ ), где обращается в  $\infty$ . Глубина модуляции ( $a_{\max} - a_{\min}$ ) максимальна при  $C = 0$  и уменьшается до нуля при увеличении  $|C|$  до  $|C| = |C_{\max}|$  в фазовых центрах.

В случае  $\Delta k = 0$  из (2) и (4) следует, что  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  монотонно возрастают или убывают в зависимости от знака  $C$ . Когда  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  ( $C = 0$ ) амплитуда ВГ  $a_2(z)$  убывает, обращаясь в нуль при  $\tilde{z} = z_0 / \sigma E$ . В этой точке фаза ВГ скачком изменяется на  $\pi$  (см. Приложение Б) и происходит переход на ветвь решения, соответствующую  $\psi = \frac{\pi}{2}$ . При  $\Delta k \neq 0$  фазы волн монотонно зависят от  $z$ , если начальные условия такие, что  $C^{\Phi_2} \leq C < 0$ ,  $\Delta < C \leq C^{\Phi_1}$ , где через  $C^{\Phi_1}$  и  $C^{\Phi_2}$  обозначены значения  $C$  в фазовых центрах.

## 2. Генерация ВГ в резонаторе с внешней накачкой

Поместим нелинейную среду, длиной  $l$ , в кольцевой резонатор. В качестве накачки используем излучение внешнего лазера с частотой  $\omega$ . Пусть зеркала резонатора прозрачны для волны накачки, тогда резонаторные условия возникают для ВГ

$$\begin{aligned} a_2(0, t) &= \alpha a_2(l, t - \Delta t); \\ \varphi_2(0, t) &= \varphi_2(l, t - \Delta t) \pm \delta, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Delta t = (l_p - l)/c$ ,  $l_p$  — длина резонатора;  $\alpha$  — коэффициент ослабления за проход;  $\delta$  — расстройка резонатора. В стационарном случае амплитуда и фаза ВГ  $a_s(z)$  и  $\varphi_s(z)$  не зависят от времени и удовлетворяют системе уравнений

$$a_s(0) - \alpha a_s(l) = 0; \quad (9)$$

$$\varphi_s(0) - \varphi_s(l) - \delta = \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Очевидно, что в этом случае амплитуда и фаза на выходе нелинейной среды  $a_s(l)$  и  $\varphi_s(l)$  дается решением стационарной задачи о ГВГ без резонатора (1), (3) с граничными значениями  $a_s(0)$ ,  $\varphi_s(0)$ . Значения  $a_1(0)$  и  $\varphi_1(0)$  постоянны и определяются излучением внешнего лазера. Поскольку ГВГ зависит только от разности фаз на границе, то без ограничения общности можно считать, что  $\varphi_1(0) = 0$  и  $\psi(0, t) = -\varphi_2(0, t)$ .

Когда отстройка от точного фазового синхронизма  $\Delta k = 0$  и фазовые скорости волн в среде согласованы, временную эволюцию можно исследовать, используя метод отображений Пуанкаре. Если  $a_n(0), \varphi_n(0)$  — значения на  $n$ -м обходе резонатора на входе в нелинейную среду, тогда  $a_n(l), \varphi_n(l)$  на выходе определяются из решений (1), (3) стационарной задачи без резонатора, а условия (8) дают значения амплитуды и фазы на  $n+1$  обходе. Построенное таким образом отображение позволяет найти значение амплитуды и фазы ВГ через промежутки времени, кратные времени обхода резонатора. Стационарные состояния (9), (10) являются неподвижными точками отображения. Заметим, что в окрестности неподвижной точки, где комплексная амплитуда ВГ мало изменяется за время, равное времени обхода резонатора, при описании распространения излучения в среде можно приближенно использовать решения стационарной задачи (1), (3) в том случае, если  $\Delta k/k_2 \ll 1$ .

Для исследования устойчивости неподвижной точки найдем отображение, связывающее малые отклонения от неподвижной точки

$$\delta a_n = a_n(0) - a_s(0), \quad \delta \varphi_n = \varphi_n(0) - \varphi_s(0)$$

на  $n$  и  $n+1$  проходах. В Приложении В приведены коэффициенты матрицы  $\mathbf{T}$

$$\begin{pmatrix} \delta a_{n+1} \\ \delta \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \delta a_n \\ \delta \varphi_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Перейдем в (11) к переменным  $x = a_2 \cos \varphi_2$ ,  $y = a_2 \sin \varphi_2$ . Неподвижная точка устойчива, если собственные значения матрицы  $\tilde{\mathbf{T}}$  в новых переменных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  удовлетворяют условию  $|\lambda_{1,2}| < 1$ .

*а) Случай точного резонанса и синхронизма ( $\delta = 0$  и  $\Delta k = 0$ )*

Для того чтобы существовало решение уравнения (10), соответствующее  $n = 0$ , необходимо, чтобы нелинейное изменение фазы ВГ за проход  $\Delta \varphi = \varphi_2(l) - \varphi_2(0)$  было равно нулю. Это возможно только в одном случае при  $\psi(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $C = 0$ . Стационарное значение амплитуды на входе в нелинейную среду дается выражением

$$a_s(0) = \alpha E \frac{E \operatorname{th}(\sigma E l) + a_s(0)}{E + \operatorname{th}(\sigma E l) a_s(0)}. \quad (12)$$

Это решение существует для любой приведенной длины нелинейной среды  $l/L$  ( $L = 1/\sigma a_1(0)$  — длина преобразования) и произвольных значений добротности резонатора.

Для  $C = 0$  и  $l \gg L$  из (B1)–(B4) можно получить условие устойчивости в виде

$$2 - \alpha \frac{l}{L} \sqrt{1 - \alpha^2} - (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) < 0. \quad (13)$$

Как показывает численный анализ, (13) выполняется для любой добротности резонатора, если  $l < l_{\text{кр}} = 3,6 L$ . Для длин, больших критической, при «средних»  $\alpha$  появляется область неустойчивости, которая увеличивается с ростом приведенной длины. При анализе причины возникновения неустойчивости обратимся к фазовому портрету. Для рассматриваемых длин стационарная амплитуда  $a_2(0)/E \approx \alpha$ .

Пусть стационарные значения амплитуды и фазы ВГ при различных  $\alpha$  получают одно и то же приращение  $\delta a_0$  и  $\delta \varphi_0$ . Нетрудно заметить, что на фазовой плоскости соответствующие возмущенным значениям точки попадают на самые удаленные от сепаратрисы траектории, когда  $\alpha \approx 1 - \alpha$ . Для таких  $\alpha$  изменение фазы ВГ за один проход будет максимальным. В области малых  $C$   $\Delta \varphi$  линейно зависит от  $C$  (B4). Поэтому если длина нелинейной среды такая, что  $|\Delta \varphi| > 2|\delta \varphi_0|$ , то неравенство будет выполняться для произвольных  $\delta \varphi$  и стационарное состояние станет неустойчивым. Очевидно, что тип неустойчивости — «седло», т. е. при возмущении только амплитуды система возвращается в неподвижную точку.

Решение системы уравнений (9), (10) для  $n = \pm 1$  существует в некоторой области добротности резонатора, если нелинейное изменение фазы ВГ за проход составляет  $\pm 2\pi$ . Величина  $|\Delta \varphi|$  за период  $T$  ( $T$  определен в (6)) возрастает с ростом  $|C|$  и максимальна в фазовых центрах, где  $|C| = |C_{\text{max}}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ . Так

как  $T$  минимален в фазовых центрах, то для сред с длиной  $l \geq T^\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi L$  нелинейное изменение фазы максимально для начальных условий, соответствующих фазовым центрам  $a_2(0) = a_2^\Phi = E / \sqrt{3}$  и  $\psi(0) = 0, \pi$ . Поэтому минимальную длину можно найти из условия

$$|\Delta\varphi| = \sqrt{2} \frac{l_{\min}}{L} = 2\pi. \quad (14)$$

Очевидно, что при  $l = l_{\min}$  (9) выполняется только для  $\alpha = 1$ . При увеличении длины нелинейной среды уравнения (9) и (10) имеют решения в некотором диапазоне добротности резонатора. На рис. 1, а представлены результаты численного решения (9) и (10) для различных значений коэффициента ослабления за один проход. Области устойчивых стационарных состояний показаны непрерывной линией, а области неустойчивости — штриховой. В случае  $n = \pm 1$  матрица  $\tilde{T}$  находилась численно. Получено, что неподвижная точка является устойчивым или неустойчивым «фокусом». Отметим, что этому стационару соответствуют два набора значений разности фаз на входе, т. е. при  $\Delta\kappa = 0$  начальные условия  $\psi(0)$  и  $\pi - \psi(0)$  дают одинаковые распределения амплитуд в среде.

При выполнении условия  $\sqrt{2}l/L \geq 4\pi$  возникает третье стационарное состояние, отвечающее  $\Delta\varphi = \pm 4\pi$  (рис. 2). Таким образом, даже в простейшем случае  $\Delta\kappa = 0$  и  $\delta = 0$  можно получить бистабильность и мультистабильность при достаточно длинной среде порядка нескольких длин преобразования  $L$ .

### б) Случай ненастроенного резонатора ( $\delta \neq 0$ )

Стационарное состояние с  $n = 0$  и  $\delta < \pi$  существует в некотором диапазоне  $\alpha$ , когда нелинейный набег фазы при однократном обходе резонатора компенсирует линейный, обусловленный расстройкой, т. е.  $\Delta\varphi = \delta$ . Понятно, что такое решение существует для любой длины нелинейной среды, в том числе и короткой ( $l/L \ll 1$ ), когда справедливо приближение заданного поля. Если  $\delta > \pi$ , то при любой длине  $l/L$  можно выполнить условие  $\Delta\varphi_2 + \delta = 2\pi$ . Причем стационарное значение амплитуды будет таким же, как в случае  $\delta' = \delta - \pi$ . Это происходит потому, что  $\Delta\varphi$  для расстроек  $\delta$  и  $\delta'$  различаются лишь знаком, значит разности фаз на входе в этих случаях  $\psi(0)$  и  $\pi - \psi(0)$ , а амплитуды равны. Когда  $\delta = \pi$ , разность фаз в стационарном состоянии  $\psi(0) = -\frac{\pi}{2}$ , а амплитуду можно вычислить из (12) при  $z_0 < 0$ .

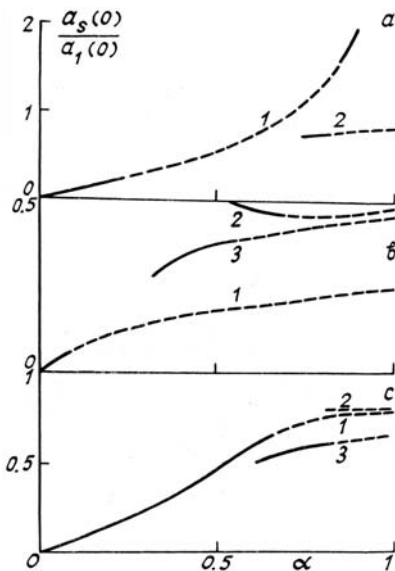


Рис. 1. Зависимость стационарной амплитуды ВГ от добротности резонатора для а)  $\delta = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $l/L = 4,4$ ; б)  $\delta = 0,2$ ,  $\Delta = 0$ ,  $l/L = 5,5$ ; в)  $\delta = 0$ ,  $\Delta = 0,05$ ,  $l/L = 4,4$ . Кривая 1 соответствует стационарным амплитудам с нелинейным изменением фазы за проход  $\Delta\varphi = \delta$ , 2 и 3 —  $\Delta\varphi = \delta \pm 2\pi$  (в случае  $\delta = 0$  и  $\Delta = 0$  стационарные состояния с  $\Delta\varphi = \pm 2\pi$ ; имеют одинаковые амплитуды). Устойчивые и неустойчивые области обозначены непрерывной и пунктирной линиями соответственно

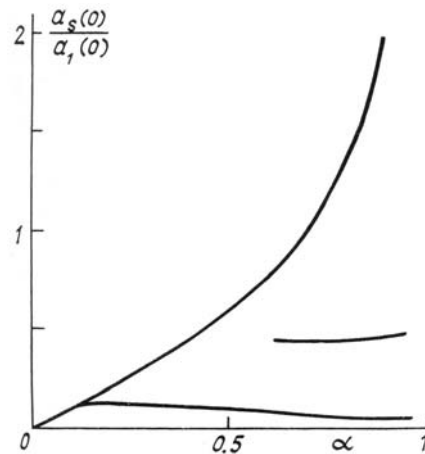


Рис. 2. Зависимость стационарной амплитуды ВГ от добротности резонатора для  $\delta = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $l/L = 10$

Длину, при которой в некоторой области  $\alpha$  существуют одновременно два решения, можно найти из условия  $\Delta\varphi^{\Phi_1} + \delta \geq 2\pi$ , где используется (Б5) в фазовом центре  $\Phi_1$  ( $\Delta\varphi > 0$ ). При увеличении  $l/L$  так, что выполняется  $\Delta\varphi^{\Phi_2} + \delta \geq 2\pi$ , появляется третье стационарное состояние (рис. 1, б). Видно, что для значений параметров, приведенных в подписи к рисунку, есть область добротности, в которой два стационарных состояния, отвечающих  $\Delta\varphi + \delta = \pm 2\pi$ , одновременно устойчивы.

Когда неподвижная точка, соответствующая стационару с  $n = 0$ , становится неустойчивой, на фазовой плоскости появляется пара точек 1 и 2 таких, что если система находится в 1, то через обход она оказывается в 2 и затем возвращается назад. В следующей работе мы покажем, что такое поведение приводит к появлению ГВГ в виде прямоугольных импульсов.

в) *Случай неточного фазового синхронизма* ( $\Delta k \neq 0$ ,  $\delta = 0$ )

В этом случае из (4) следует, что однопроходовая задача не имеет решений, для которых  $\varphi_2(z) \equiv \varphi_2(0)$ . Но при любой длине нелинейной среды можно найти множество решений с  $\varphi_2(L) = \varphi_2(0)$ , т. е. линейный набег фазы, обусловленный отстройкой от точного синхронизма, в точности скомпенсирован нелинейным изменением фазы. Это значит, что можно построить решение с  $\Delta\varphi = 0$  в некоторой области  $\alpha$ . Длину, при которой появляется решение с  $\Delta\varphi = \pm 2\pi$ , можно оценить, вновь используя (Б5). Как показывают численные расчеты, при  $\Delta k \neq 0$  может происходить изменение типа устойчивости стационарного состояния с  $\Delta\varphi = 0$ : «узел» преобразуется в «фокус». В этом случае существует область добротности, при которой одновременно устойчивы стационарные состояния с  $\Delta\varphi = \pm 2\pi$  (рис. 1, в) (здесь верхний стационар устойчив при  $0,8 \leq \alpha \leq 0,81$ ), а также с  $\Delta\varphi = 0$  и  $\Delta\varphi = -2\pi$ .

### Заключение

Таким образом, использование резонаторной системы ГВГ приводит не только к повышению эффективности преобразования излучения, но и к возникновению новых стационарных и нестационарных режимов. В частности, система может стать бистабильной или мультистабильной, а при определенных соотношениях параметров стационарные состояния могут вообще отсутствовать. При малых значениях  $l/L$  ( $L = 1/\sigma a_1(0)$  — длина преобразования) использование резонатора любой добротности не приводит к появлению новых режимов. Это связано с тем, что само по себе увеличение интенсивности второй гармоники, благодаря резонаторному эффекту, не дает увеличения нелинейного набег фазы, достаточного для возникновения нового (второго) решения. Существует некоторая критическая (пороговая) величина  $l/L$ , после превышения которой возникают новые решения в схемах с достаточно добротными резонаторами. При дальнейшем увеличении нелинейности нелинейный набег фазы может стать кратным  $2\pi$ , что приводит к возникновению мультистабильных решений. Однако при фиксированном, выше критического, значении  $l/L$  новые дополнительные решения возникают только по достижении минимального порогового значения добротности резонатора. Рассмотренные режимы весьма чувствительны к изменению добротности резонатора в критических точках и могут быть использованы в схемах модуляции излучения ВГ. Одним из вариантов этих режимов является весьма своеобразный режим периодически повторяющихся прямоугольных импульсов, который будет рассмотрен отдельно.

Приложение А

В выражениях (1)–(3) через  $e_1 > e_2 > e_3$  обозначены корни кубического уравнения

$$t^3 + Bt + D = 0 \quad (\text{A1})$$

с коэффициентами

$$B = -\frac{1}{3}(2 + \Delta^2)^2 + 1 + 2\Delta C;$$

$$D = \frac{1}{3}(2 + \Delta^2)(1 + 2\Delta C) - \frac{2}{27}(2 + \Delta^2)^3 - C^2. \quad (\text{A2})$$

В общем виде корни уравнения (A1) можно записать в форме Кардано [7]

$$e_1 = 2 \left( -\frac{B}{3} \right)^{1/2} \cos \frac{\beta}{3}, \quad e_{2,3} = -2 \left( -\frac{B}{3} \right)^{1/2} \cos \left( \frac{\beta}{3} \pm \frac{\pi}{3} \right), \quad (\text{A3})$$

где

$$\cos \beta = -\frac{D}{2 \left( -\frac{B}{3} \right)^{3/2}}. \quad (\text{A4})$$

Приведем значения корней в некоторых частных случаях. Для сепаратрисы, когда  $C = \Delta$

$$e_1 = e_2 = \frac{1 - \Delta^2}{3}, \quad e_3 = -\frac{2 - 2\Delta^2}{3}. \quad (\text{A5})$$

В случае, если  $C = 0$  (это условие определяет траекторию, проходящую через начало координат)

$$e_{1,2} = \frac{2 + \Delta^2}{6} \pm \sqrt{(2 + \Delta^2)^2 - 4}, \quad e_3 = -\frac{2 + \Delta^2}{3}. \quad (\text{A6})$$

Для фазовых центров

$$e_1^{\Phi_1, \Phi_2} = \frac{2}{9} (\Delta^2 + 3 \mp 2\Delta \sqrt{\Delta^2 + 3});$$

$$e_2^{\Phi_1, \Phi_2} = e_3^{\Phi_1, \Phi_2} = -\frac{1}{9} (\Delta^2 + 3 \mp 2\Delta \sqrt{\Delta^2 + 3}). \quad (\text{A7})$$

Очевидно, что если  $\Delta k = 0$ , то корни для фазовых центров  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  совпадают.

## Приложение Б

В случае произвольных  $\Delta k$  изменение фаз волны накачки и ВГ с расстоянием имеет вид

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(0) - \Delta \sigma E z - \frac{C - \Delta}{\sqrt{e_1 - e_3} \left( \frac{1 - \Delta^2}{3} - e_3 \right)} [\Pi(m_1; \sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m) - \Pi(m_1; z_0/m)], \quad (\text{B1})$$

$$\varphi_2(z) = \varphi_2(0) + \Delta \sigma E z - \frac{C}{\sqrt{e_1 - e_3} \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 \right)} \left\{ \frac{(e_1 - e_2) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 \right)}{\left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2 \right) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1 \right)} \times \right.$$

$$\times [\Pi(m_2; \sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m) - \Pi(m_2; z_0/m)] + \frac{\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3}{\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z +$$

$$+ \frac{\left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 \right)^{1/2} (e_1 - e_3)^{1/2}}{\left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2 \right)^{1/2} \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1 \right)^{1/2}} \left[ \arctg \left( \left[ \frac{(e_2 - e_3)^2 \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1 \right)}{(e_1 - e_3) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2 \right) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 \right)} \right]^{1/2} \right) \times \right.$$

$$\times \left. \frac{\text{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m) \text{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m)}{\text{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0/m)} \right) -$$

$$\left. - \arctg \left( \left[ \frac{(e_2 - e_3)^2 \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1 \right)}{(e_1 - e_3) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2 \right) \left( \frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3 \right)} \right]^{1/2} \frac{\text{sn}(z_0/m) \text{cn}(z_0/m)}{\text{dn}(z_0/m)} \right) \right\}, \quad (\text{B2})$$

где  $m$  – параметр эллиптических функций, а параметры эллиптического интеграла  $\Pi(m_{1,2}; t/m)$

$$m_1 = \frac{e_2 - e_3}{\frac{1 - \Delta^2}{3} - e_3}, \quad m_2 = m \frac{\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_1}{\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_2} \quad (\text{B3})$$

изменяются в пределах  $0 \leq m_1 \leq 1$ . Когда  $\Delta k = 0$  и  $C = 0$  ( $\psi(0) = \pm \frac{\pi}{2}$  или  $a_2(0) = 0$ ), решение (1) переходит в хорошо известное решение в виде гиперболического тангенса [4]. При  $\psi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$  поведение фазы

ВГ можно получить, разлагая (B2) по малому параметру  $|C| \ll \frac{2}{3\sqrt{3}}$ :

$$\varphi_2(z) \approx \varphi_2(0) - C \sigma E z - \text{sign}(C) \left[ \arctg \left( \frac{\text{th}(\sigma E z + z_0)}{|C|} \right) \mp \arctg \left( \frac{\text{th}(z_0)}{|C|} \right) \right]. \quad (\text{B4})$$

В пределе  $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (Б4) дает скачок фазы на  $\pi$  в точке среды, где амплитуда ВГ обращается в нуль.

За исключением этой точки фазы основного излучения и ВГ постоянны для решения; соответствующего начальным условиям  $C = 0$ . Как в случае  $\Delta k = 0$ , так и при  $\Delta k \neq 0$  в фазовых центрах  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  являются линейными функциями  $z$

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \varphi_1(0) - \Delta \sigma E^\Phi z - \frac{C^\Phi - \Delta}{\frac{1 - \Delta^2}{3} - e_3^\Phi} \sigma E^\Phi z; \\ \varphi_2^\Phi(z) &= \varphi_2(0) + \Delta \sigma E^\Phi z - \frac{C^\Phi}{\frac{2 + \Delta^2}{3} + e_3^\Phi} \sigma E^\Phi z,\end{aligned}\quad (B5)$$

а разность фаз  $\psi(z)$  постоянна.

## Приложение В

Для того чтобы определить матрицу  $\mathbf{T}$ , надо найти связь между малыми отклонениями  $\delta a = a_2(0) - a_3(0)$ ,  $\delta \varphi = \varphi_2(0) - \varphi_3(0)$  на входе в нелинейную среду и соответствующими им отклонениями на выходе. Для этого вычислим первый член разложения в ряд по  $\delta a$  и  $\delta \varphi$  (1) и (3). Используя (8), (9), (10), найдем элементы матрицы  $\mathbf{T}$

$$\begin{aligned}T_{11} &= \alpha^2 \left\{ -\frac{\Delta^2}{3} (1 - V(l)) + \frac{a_1^2(0)}{E^2} V(l) + \frac{a_s^2(l)}{E^2} + E^2 \frac{x_3}{2a_s(0)} (1 - V(0)) + \right. \\ &+ E^2 \frac{x_2 - x_3}{2a_s(0)} (\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E l + z_0 | m) - V(l) \operatorname{sn}^2(z_0 | m)) + \\ &+ W(l) \sigma E l \left( 1 + \frac{E^2}{2a_s(0)} \frac{x_1 - x_3}{e_1 - e_3} \right) - \frac{E^2 W(l) I(l)}{2a_s(0) \sqrt{e_1 - e_3}} \left( \frac{x_2 - x_3}{e_1 - e_3} - m \frac{x_1 - x_3}{e_1 - e_3} \right) \Big\},\end{aligned}\quad (B1)$$

$$\begin{aligned}T_{12} &= \alpha^2 E^2 \left\{ \frac{y_3}{2a_s(0)} (1 - V(l)) + W(l) \frac{\sigma E l}{2a_s(0)} \frac{y_1 - y_3}{e_1 - e_3} + \frac{y_2 - y_3}{2a_s(0)} (\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E l + z_0 | m) - \right. \\ &- \operatorname{sn}^2(z_0 | m) V(l)) - \frac{W(l) I(l)}{2a_s(0) \sqrt{e_1 - e_3}} \left( \frac{y_2 - y_3}{e_1 - e_3} - m \frac{y_1 - y_3}{e_1 - e_3} \right) \Big\},\end{aligned}\quad (B2)$$

$$\begin{aligned}T_{21} &= \sigma E^3 C \left\{ \frac{2a_s(0)}{3} \Delta^2 \int_0^l \frac{V(z) - 1}{a_s^4(z)} dz - \frac{1}{a_s(0)} \int_0^l \frac{dz}{a_s^2(z)} + \right. \\ &+ E^2 x_3 \int_0^l \frac{1 - V(z)}{a_s^4(z)} dz + E^2 (x_2 - x_3) \int_0^l \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0 | m) - \operatorname{sn}^2(z_0 | m) V(z)}{a_s^4(z)} dz + \\ &+ 2\sigma E \int_0^l \frac{W(z) z}{a_s^4(z)} dz \left( a_s(0) + \frac{E^2}{2} \frac{x_1 - x_3}{e_1 - e_3} \right) + 2 \frac{a_s(0) a_1^2(0)}{E^2} \int_0^l \frac{V(z)}{a_s^4(z)} dz + \\ &+ 2 \frac{a_s(0)}{E^2} \int_0^l \frac{dz}{a_s^2(z)} - \frac{E^2}{V \sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^l \frac{W(z) I(z)}{a_s^4(z)} dz \left( \frac{x_2 - x_3}{e_1 - e_3} - m \frac{x_1 - x_3}{e_1 - e_3} \right) \Big\},\end{aligned}\quad (B3)$$

$$\begin{aligned}T_{22} &= E^3 C \left\{ \operatorname{tg} \psi_s(0) \int_0^l \frac{dz}{a_s^2(z)} + E^2 y_3 \int_0^l \frac{1 - V(z)}{a_s^4(z)} dz + \right. \\ &+ E^2 (y_2 - y_3) \int_0^l \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0 | m) - V(z) \operatorname{sn}^2(z_0 | m)}{a_s^4(z)} dz -\end{aligned}$$

$$-\frac{E^2}{V e_1 - e_3} \int_0^l \frac{W(z) I(z)}{a_s^4(z)} dz \left( \frac{y_2 - y_3}{e_1 - e_3} - m \frac{y_1 - y_3}{e_1 - e_3} \right), \quad (B4)$$

где

$$W(z) = \frac{a_{1s}^2(z) a_s^*(z)}{E^3} \sin \psi_s(z), \quad V(z) = \frac{W(z)}{W(0)}.$$

Пределы интеграла

$$I(z) = \int_{\xi(0)}^{\xi(z)} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 - m \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

определяются следующим образом:

$$\xi(z) = \arcsin(\operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} \sigma E z + z_0 | m)).$$

Через  $x_i, y_i$  обозначены коэффициенты, пропорциональные  $\delta a$  и  $\delta \phi$ , получающиеся при разложении корней (A3) уравнения (A1):

$$x_1 = -\frac{1}{3} \frac{F^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)^{1/2}} \cos\left(\frac{\beta_s}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} \frac{P^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)} + \frac{1}{6} \frac{D_s F^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)^2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s}{3}\right) / \sqrt{1 - \frac{D_s^2}{4\left(-\frac{B_s}{3}\right)^3}}; \quad (B5)$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{3} \frac{F^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)^{1/2}} \cos\left(\frac{\beta_s}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \frac{P^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)} + \frac{1}{6} \frac{D_s F^a}{\left(-\frac{B_s}{3}\right)^2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right) / \sqrt{1 - \frac{D_s^2}{4\left(-\frac{B_s}{3}\right)^3}}.$$

В (B5)  $B_s$  и  $D_s$  коэффициенты (A2) уравнения (A1),  $\beta_s$  определен в (A5), а

$$F^a = 2\Delta \left( a_1^2(0) \frac{a_1^2(0) - 2a_s^2(0)}{E^5} \cos \psi(0) + \Delta a_s(0) \frac{2a_1^2(0) - a_s^2(0)}{E^4} \right) + \frac{a_s(0)}{E^2} \left( \frac{4}{3} \Delta^2 (2 + \Delta^2) - 2\Delta C \right);$$

$$P^a = \left( \frac{2}{3} \Delta (2 + \Delta^2) - 2C \right) \left( a_1^2(0) \frac{a_1^2(0) - 2a_s^2(0)}{E^5} \cos \psi(0) + \Delta a_s(0) \frac{2a_1^2(0) - a_s^2(0)}{E^4} \right) +$$

$$+ \frac{a_s(0)}{E^2} \left( -\frac{2}{3} (2 + \Delta^2) \Delta C - \frac{2}{3} \Delta^2 (1 + 2\Delta C) + \frac{12}{27} \Delta^2 (2 + \Delta^2)^2 \right).$$

Коэффициенты  $y_i$  получаются при замене в (B5)  $F^a$  на  $F^0$  и  $P^a$  на  $P^0$ , где

$$F^0 = 2\Delta \frac{a_1^2(0) a_s(0)}{E^3} \sin \psi(0); \quad P^0 = \left( \frac{2}{3} \Delta (2 + \Delta^2) - 2C \right) \frac{a_1^2(0) a_s(0)}{E^3} \sin \psi(0).$$

1. Drummond P.D., McNeil K.J., Walls D.F. // Opt. Commun. 1979. V. 28. № 2. P. 255–258.
2. McNeil K.J., Drummond P.D., Walls D.F. // Opt. Commun. 1978. V. 27. № 2. P. 292–294.
3. Zehle V., Mandel P. // Opt. Commun. 1988. V. 66. № 4. P. 216–218.
4. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 424 с.
5. Гайнер А.В., Коноплева Н.П., Сурдутович Г.И. Общие свойства процесса генерации второй гармоники при произвольных начальных условиях. Новосибирск, 1990. 20 с. (Препринт/Ин-т автоматки и электрометрии СО АН СССР, № 448).
6. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ, 1964.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 43 с.

Институт автоматки и электрометрии СО АН СССР  
Институт физики полупроводников СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
11 августа 1990 г.

A.V. Ghiner, N.P. Konopleva, G.I. Surdutovich. **New Mechanism Of Bistability Second Harmonic Generation within a Cavity with the External Pumping.**

The paper considers the process of the second harmonic generation in a ring resonator with external pumping at the fundamental frequency. It is shown that such a system can exist in a bistable and multistable states. For these regimes to be performed it is necessary that reduced length of the nonlinear medium (normalized by the conversion length) be large enough ( $\geq 4$ ).