«Оптика атмосферы и океана», **27**, № 2 (2014)

УДК 535.31; 681.7; 53.082.5

Остаточные фазовые искажения при коррекции с использованием лазерной опорной звезды

Л.А. Больбасова, В.П. Лукин*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 16.07.2013 г.

Техника лазерной опорной звезды при коррекции атмосферных искажений для астрономических систем в настоящее время уже нашла достаточно широкое применение. Как правило, формирование лазерной опорной звезды осуществляется путем фокусировки лазерного излучения с Земли, при этом ее угловое положение испытывает случайные флуктуации, поэтому она не может быть использована для коррекции общего наклона волнового фронта. Вопрос о влиянии флуктуации положения опорной звезды на характеристики высших аберраций фазовых флуктуаций оставался открытым. В приближении метода Гюйгенса–Френеля рассмотрено влияние флуктуаций положения лазерной опорной звезды на остаточные искажения при коррекции высших модовых составляющих флуктуаций фазы. Показано, что определяющим параметром задачи является отношение диаметра апертуры оптической системы (телескопа) к среднеквадратическому значению положения центра тяжести фокусированного лазерного пучка.

Ключевые слова: турбулентность, лазерная опорная звезда, высшие модовые составляющие фазовых флуктуаций; turbulence, laser guide star, high modal aberrations of phase fluctuations.

Введение

Известно, что при использовании техники лазерных опорных звезд в астрономии возникает проблема коррекции общего наклона волнового фронта [1, 2]. Эта проблема, обычно, для коррекции общего наклона волнового фронта снимается применением сигнала от естественной звезды. Поскольку угол корреляции наклонов волнового фронта (изокинетический угол) при работе астрономического телескопа через всю толщу атмосферы способен достигать сотен угловых секунд [3], то можно применять в качестве опорной естественную звезду, достаточно далеко отстоящую (по углу) от исследуемой звезды. При этом высшие аберрации волнового фронта корректируют с помощью сигнала от лазерной звезды, формируемой в том же направлении, что и научный объект, исследуемый с помощью астрономического телескопа [1, 2]. Однако ввиду того что лазерная опорная звезда формируется с помощью фокусированного лазерного пучка, направляемого из телескопа (с Земли), она фактически представляет собой сферическую волну со случайным центром. В таком представлении рассчитываются остаточные искажения высших аберраций фазовых флуктуаций. Расчет выполнен в приближении метода Гюйгенса–Френеля [4]. Исследуются ограничения использования такой опорной звезды [5–7].

* Лидия Адольфовна Больбасова (sla@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

Фаза для плоской волны, идущей сверху вниз (от реальной звезды), в точке $\boldsymbol{\rho}$ записывается в приближении геометрической оптики [4] в следующем виде:

$$S^{\text{пл}}(\boldsymbol{\rho}) = k\int_0^\infty d\xi \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\exp(i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}), \qquad (1)$$

где k – волновое число излучения; $d^2n(\boldsymbol{\kappa},\xi)$ – спектральное разложение флуктуаций показателя преломления по пространственным частотам $\boldsymbol{\kappa}$.

Во внешнем интеграле выражения (1) верхний предел интегрирования указан как бесконечный, т.е. предполагается, что оптическая волна распространяется из бесконечно удаленной точки, однако практически верхним пределом интегрирования может быть высота, начиная с которой в атмосфере имеют место флуктуации показателя преломления. А поскольку интенсивность турбулентности в атмосфере затухает с высотой над Землей, можно ввести во внешнем интеграле в (1) конечные пределы интегрирования. Предположим, что лазерная опорная звезда (ЛОЗ) формируется на высоте X фокусировкой лазерного излучения, ее можно представить как сферическую волну, идущую сверху вниз с высоты X из точки с координатой $\boldsymbol{\rho}_{\text{л.п}}$, где $\boldsymbol{\rho}_{\text{л.п}}$ – вектор, характеризующий мгновенное положение центра тяжести фокусированного с Земли лазерного пучка. Тогда фазовые флуктуации, которые возникают в ней, могут быть записаны как

$$S^{\text{сф}}(\rho,\rho_{\text{л.п}}) = k\int_0^X d\xi \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa}, X-\xi)\times$$

$$\times \exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho(\xi/X) + i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(1-\xi/X)\} =$$

$$= k\int_0^X d\xi \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho(1-\xi/X) + i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)\}. \quad (2)$$

Предположим, что адаптивная система, использующая сигнал от ЛОЗ, работает по алгоритму фазового спряжения, тогда можно характеризовать остаточные фазовые искажения при коррекции с использованием сигнала от ЛОЗ через разность фаз:

$$\Delta S(\rho) = S^{\text{пл}}(\rho) - S^{\text{сф}}(\rho,\rho_{\text{л.п}}). \quad (3)$$

Подставив (1) и (2) в (3), получим

$$\Delta S(\rho) = k\int_0^X d\xi \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\{\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho) - \exp[i\boldsymbol{\kappa}\rho(1-\xi/X) +$$

$$+ i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]\} + k\int_X^\infty d\xi \iint d^2 n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho). \quad (4)$$

Второе слагаемое в последнем выражении обусловлено некомпенсируемой с использованием ЛОЗ частью флуктуаций, расположенных «выше» опорной звезды. При правильном выборе X – высоты формирования ЛОЗ, этим членом можно пренебречь. В любом случае эта часть фазовых флуктуаций не коррелирует с первым слагаемым в (4) и ее можно изучать отдельно [5].

Прежде всего, рассмотрим величину дисперсии для разности фаз (3) $<[\Delta S(\rho)]^2>$ в предположении, что возможно «расщепление» [6] при усреднении локальных $d^2 n(\boldsymbol{\kappa},\xi)$ и интегральных $\rho_{\text{л.п}}$ флуктуаций, в этом случае дисперсия $<[\Delta S(\rho)]^2>$ выражается

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = k^2 \int_0^X d\xi_1 \int_0^X d\xi_2 \iint <d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1,\xi_1) d^2 n^*(\boldsymbol{\kappa}_2,\xi_2)> \times$$

$$\times <\{\exp(i\boldsymbol{\kappa}_1\rho) - \exp[i\boldsymbol{\kappa}_1\rho(1-\xi_1/X) + i\boldsymbol{\kappa}_1\rho_{\text{л.п}}(\xi_1/X)]\}\times$$

$$\times\{\exp(i\boldsymbol{\kappa}_2\rho) - \exp[i\boldsymbol{\kappa}_2\rho(1-\xi_2/X) + i\boldsymbol{\kappa}_2\rho_{\text{л.п}}(\xi_2/X)]\}> . \quad (5)$$

При усреднении по локальным флуктуациям по трассе распространения воспользуемся корреляционными свойствами турбулентных действительных сред, для которых применима следующая формула:

$$<d^2 n(\boldsymbol{\kappa}_1,\xi_1) d^2 n^*(\boldsymbol{\kappa}_2,\xi_2)> =$$

$$= 2\pi\delta(\xi_1-\xi_2)\delta(\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_2)\Phi_n(\boldsymbol{\kappa}_1,\xi_1) d^2\kappa_1 d^2\kappa_2. \quad (6)$$

В результате в (5) после усреднения по локальным реализациям турбулентных флуктуаций получим

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = 2\pi k^2 \int_0^X d\xi \iint d^2\kappa \Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\times$$

$$\times <\{2 - \exp[-i\boldsymbol{\kappa}\rho(\xi/X) + i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)] -$$

$$- \exp[i\boldsymbol{\kappa}\rho(\xi/X) - i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]\}>, \quad (7)$$

где под двумерным интегралом остается операция усреднения по случайным реализациям интегральных флуктуаций $\rho_{\text{л.п}}$.

Далее, выполнив в (7) усреднение по случайным реализациям $\rho_{\text{л.п}}$, с использованием формулы

$$<\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)> = \exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2) \quad (8)$$

имеем

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = 4\pi k^2 \int_0^X d\xi \iint d^2\kappa \Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\times$$

$$\times\{1 - \exp[-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2]\cos(\boldsymbol{\kappa}\rho(\xi/X)\}. \quad (9)$$

Здесь $<\rho^2_{\text{л.п}}>$ – дисперсия флуктуаций центра тяжести фокусированного лазерного пучка в плоскости формирования ЛОЗ.

При проведении вычислений в (9) предположим, что спектр $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)$ – изотропная функция в спектральной области, тогда

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = 8\pi^2 k^2 \int_0^X d\xi \int_0^\infty \kappa d\kappa \Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\times$$

$$\times\{1 - \exp[-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2] J_0(\kappa\rho(\xi/X))\}. \quad (10)$$

Последнее выражение (10) при значении $<\rho^2_{\text{л.п}}> = 0$ позволяет рассчитать предельные значения остаточных искажений, и для случая, когда $<\rho^2_{\text{л.п}}> \neq 0$, эти искажения будут больше. Далее воспользуемся колмогоровской моделью спектра турбулентности

$$\Phi_n(\kappa,\xi) = 0{,}033 C_n^2(\xi)\kappa^{-11/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (11)$$

где $C_n^2(\xi)$ – профиль структурного параметра турбулентной атмосферы в точке ξ по трассе распространения; κ_m^{-1} – величина, пропорциональная внутреннему масштабу турбулентности.

В результате в (10) приходим к выражению

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = 8\pi^2 k^2 0{,}033 \int_0^X d\xi \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-8/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)\times$$

$$\times\{1 - \exp[-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п.}}>(\xi/X)^2] J_0(\kappa\rho(\xi/X))\}. \quad (12)$$

В результате вычисления внутреннего интеграла в (12) получаем

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = 8\pi^2 0{,}033k^2 \int_0^X d\xi C_n^2(\xi)\frac{\Gamma(-5/6)}{2}\{\kappa_m^{-5/3} - [\kappa_m^{-2} +$$

$$+\frac{<\rho^2_{л.п}>}{2}(\xi/X)^2]^{5/6}\ {}_1F_1(-\frac{5}{6},1;-\frac{\rho^2(\xi/X)^2}{4[\kappa_m^{-2}+\frac{<\rho^2_{л.п}>}{2}(\xi/X)^2]})\}.$$

(13)

Проанализируем выражение (13) с точки зрения его зависимости от величины дисперсии $<\rho^2_{л.п}>$. При оценке эффективности коррекции изображения в телескопе с использованием сигнала от ЛОЗ сравним два предельных случая: когда дисперсия дрожания фокусируемого пучка $<\rho^2_{л.п}> = 0$ (т.е. когда опорная звезда неподвижна) и когда положение ЛОЗ меняется в процессе измерений, т.е. когда $<\rho^2_{л.п}> \neq 0$. При этом будем анализировать поведение дисперсии $<[\Delta S(\rho)]^2>$ для значения координаты $\rho \le D$, где D – диаметр приемного телескопа.

Если считать, что ЛОЗ неподвижна, т.е. $<\rho^2_{л.п}> = 0$, то на оси телескопа (когда $\rho = 0$) величина остаточных искажений $<[\Delta S(0)]^2> \equiv 0$. Это означает, что неподвижная ЛОЗ не вносит каких-либо систематических ошибок. В качестве следующего шага анализа воспользуемся в (12) разложением в ряд множителя $\exp[-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{л.п}>(\xi/X)^2]$. При учете только первых двух членов разложения получаем

$$<[\Delta S(\rho)]^2> \approx 8\pi^2 k^2 0{,}033 \int_0^X d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\kappa\kappa^{-8/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) \times$$

$$\times\{1 - J_0(\kappa\rho(\xi/X))\} + 8\pi^2 k^2 0{,}033 <\rho^2_{л.п}> \times$$

$$\times \int_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^2 \int_0^\infty d\kappa\kappa^{-2/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) J_0(\kappa\rho(\xi/X)).$$

(14)

Рассмотрим значения слагаемых (14) для случая, когда $\rho\kappa_m \gg 1$. Для краткости написания предварительно введем следующие обозначения для слагаемых выражения (14), а именно:

$$<[\Delta S(\rho)]^2> = <[\Delta S(\rho)]^2>_1 + <[\Delta S(\rho)]^2>_2 .$$

Первое слагаемое из (14), обозначенное как $<[\Delta S(\rho)]^2>_1$, представляет собой оценку дисперсии остаточных фазовых искажений для неподвижной опорной звезды, а второе слагаемое $<[\Delta S(\rho)]^2>_2$ – это дополнительная ошибка, связанная с тем, что опорная звезда рассматривается как сферический источник, имеющий случайное положение своего центра. В результате вычисления интегралов в (14) можно показать, что отношение

$$\frac{<[\Delta S(\rho)]^2>}{<[\Delta S(\rho)]^2>_1} \approx 1 + 0\left(\frac{<\rho^2_{л.п}>}{\rho^2}\right). \qquad (15)$$

Отдельно рассчитаем значение первого слагаемого из (14) при $\rho\kappa_m \gg 1$:

$$<[\Delta S(\rho)]^2>_1 = 8\pi^2 k^2 0{,}033 \times$$

$$\times \int_0^X d\xi C_n^2(\xi) \int_0^\infty d\kappa\kappa^{-8/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)\{1 - J_0(\kappa\rho(\xi/X))\} =$$

$$= 8\pi^2 k^2 0{,}033(-\Gamma(-5/6)) \int_0^X d\xi C_n^2(\xi)\kappa_m^{-5/3} \times$$

$$\times[1 - {}_1F_1(-\frac{5}{6},1; -\kappa_m^2\rho^2(\xi/X)^2/4)] \approx$$

$$\approx \frac{4\pi^2 k^2 0{,}033}{2^{2/3}}(-\frac{\Gamma(-5/6)}{\Gamma(11/6)})\rho^{5/3}\int_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}.$$

(16)

Это последнее выражение дает значение для дисперсии остаточных фазовых искажений для неподвижной ЛОЗ. Как видно из (15), для малых значений $<\rho^2_{л.п}>$ наибольшие искажения также будут иметь место и для сравнительно небольших телескопов.

Следует отметить для практических приложений, когда ЛОЗ формируется на высоте 100 км [1, 3, 6], в хороших условиях астронаблюдений можно оценить $\sqrt{<\rho^2_{л.п}>}$ величиной порядка 1–2 м. В то же время при более сильной турбулентности эффективный «размер» ЛОЗ может быть значительно больше.

Далее рассмотрим, исходя из выражения (13), ситуацию практически наиболее правдоподобную, а именно, когда $<\rho^2_{л.п}>\kappa_m^2 \gg 1$. В этом случае основным масштабом задачи становится сама величина $\sqrt{<\rho^2_{л.п}>}$. В этом случае выражение (13) переходит в следующее:

$$<[\Delta S(\rho)]^2> \approx -4\pi^2 0{,}033k^2\Gamma(-\frac{5}{6})[\frac{<\rho^2_{л.п}>}{2}]^{5/6} \times$$

$$\times \int_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}\ {}_1F_1(-\frac{5}{6},1;-\frac{\rho^2}{2<\rho^2_{л.п}>}). \qquad (17)$$

Далее, если взять отношение (17) к (16), получаем следующее выражение, характеризующее увеличение дисперсии остаточных фазовых искажений:

$$\frac{<[\Delta S(\rho)]^2>}{<[\Delta S(\rho)]^2>_1} = [\frac{<\rho^2_{л.п}>}{2\rho^2}]^{5/6}\Gamma(11/6)\,{}_1F_1(-\frac{5}{6},1;-\frac{\rho^2}{2<\rho^2_{л.п}>}).$$

(18)

Оказывается, что уровень остаточных фазовых искажений будет зависеть от дисперсии дрожания ЛОЗ: зависимость (18) представляет собой монотонно уменьшающуюся функцию аргумента $\frac{\rho^2}{2<\rho^2_{л.п}>}$, предельно стремящуюся к значению, равному 1. Наибольшие значения отношение (18) принимает для телескопов с малыми апертурами, когда $D < \sqrt{<\rho^2_{л.п}>}$.

Для малых величин ρ ($\rho \ll \sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}$) из (17) получаем

$$<[\Delta S(\rho)]^2> \approx 4\pi^2 0{,}033 k^2 \left(\frac{<\rho^2_{\text{л.п}}>}{2}\right)^{5/6} \times$$

$$\times\left[1+\frac{5}{12}\frac{\rho^2}{<\rho^2_{\text{л.п}}>}\right]\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}. \qquad (19)$$

Это означает, что для осевых точек (малые значения ρ) или же для случая малых телескопов (таких, что диаметр апертуры телескопа $D < \sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}$) остаточная ошибка будет пропорциональна величине дрожания положения опорной звезды $<\rho^2_{\text{л.п}}>$ и будет квадратично расти от центра к периферии.

Для очень больших телескопов (когда $D \gg \sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}$), как следует из асимптотики для гипергеометрической функции ${}_1F_1\left(-\frac{5}{6},1;-\frac{\rho^2}{2<\rho^2_{\text{л.п}}>}\right)$ в (18), функциональный вид дисперсии остаточных фазовых искажений будет такой же, как и при неподвижном центре положения опорной звезды, т.е. совпадать с выражением (16).

Рассмотрим отношение уровня остаточных фазовых искажений в системе с адаптивной коррекцией (для неподвижной звезды) к уровню фазовых искажений в системе без коррекции:

$$\delta = \frac{\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}}{\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)}. \qquad (20)$$

Прежде всего, отметим следующее: поскольку для вертикальных трасс отношение δ [7–10] много меньше единицы, то в результате получаем, что дисперсия остаточных фазовых искажений, обусловленных дрожанием положения самой ЛОЗ, невелика.

В таблице приведены результаты численных расчетов отношения (20) для различных моделей вертикальных профилей структурного параметра показателя преломления [8–10], в том числе были использованы:

модель Гринвуда

$$C_n^2(\xi) = [2{,}2\cdot 10^{-13}(\xi+10)^{-1{,}3} + 4{,}3\cdot 10^{-17}]\exp\left(-\frac{\xi}{4000}\right),$$

модель HV5/7

$$C_n^2(\xi) = A\exp(-\xi/100) + 5{,}94\cdot 10^{-53}(v/27)^2\xi^{10}\times$$
$$\times\exp(-\xi/1000) + 2{,}7\cdot 10^{-16}\exp(-\xi/1500),$$

где $A = 1{,}7\cdot 10^{-14}$ м$^{-2/3}$, v = 21 м/с,

модель для обсерватории AMOS (о. Мауи, Гавайи, США)

$$C_n^2(\xi) = 8{,}16\cdot 10^{-54}\xi^{10}\exp(-\xi/1000) + 3{,}02\cdot 10^{-17}\times$$
$$\times\exp(-\xi/1500) + 1{,}90\cdot 10^{-15}\exp(-\xi/100).$$

Модель вертикального профиля структурного параметра показателя преломления	Отношение (20)	Рост радиуса когерентности r_0^*/r_0
Модель Гринвуда	0,00332	30,7
Модель HV5/7	0,00215	39,9
Модель для обсерватории AMOS, о. Мауи	0,00382	28,2

Данные таблицы фактически характеризуют увеличение размера когерентной зоны [8] в результате адаптивной коррекции с использованием ЛОЗ. Нетрудно показать, что для радиусов когерентности системы с коррекцией r_0^* и без нее r_0 увеличение размера когерентной зоны можно численно оценивать через отношение

$$r_0^*/r_0 = \left(\frac{\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}}{\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)}\right)^{-3/5}. \qquad (21)$$

Для расчета увеличения радиуса когерентности за счет коррекции можно воспользоваться данными таблицы и выводами из работы [11].

Однако чтобы правильно оценивать степень влияния остаточных фазовых искажений, необходимо сопоставить величину уменьшения флуктуаций [в соответствии с формулой (20)] с величиной дисперсий высших модовых составляющих, которые можно оценить по формулам, приведенным в [12]. Это сопоставление приводит к тому, что наличие остаточных фазовых искажений, из-за движения ЛОЗ, ограничивает номер максимально высокой модовой составляющей, для которой будет эффективна коррекция с использованием сигнала от реальной ЛОЗ.

Проанализируем далее, как влияют остаточные фазовые искажения на формирование поля в фокальной плоскости телескопа. Известно, что поле в фокусе телескопа описывается как преобразование в дальнюю зону поля волны на апертуре. Пусть на входную апертуру телескопа $W(\rho_1)$ падает плоская волна, тогда поле волны в фокальной плоскости F телескопа

$$U(F,\rho) = \iint d^2\rho_1 W(\rho_1) G_0(F,\rho;0,\rho_1)\exp(iS^{\text{пл}}(0,\rho_1). \qquad (22)$$

Здесь $G_0(F,\rho;0,\rho_1)$ – функция Грина свободного пространства, характеризующая распространение волны из входной апертуры телескопа в его фокальную плоскость. После осуществления фазосопряженной коррекции [4, 5] на входной апертуре будут иметь место нескомпенсированные остаточные фазовые флуктуации $\Delta S(\rho_1)$, которые можно описывать с помощью следующего множителя:

$$\exp[i\Delta S(\rho_1)] = \exp[(iS^{\text{пл}}(0,\rho_1) - iS^{\text{сф}}(\rho_1,\rho_{\text{л.п}})]. \qquad (23)$$

Для вычисления распределения средней интенсивности поля в фокальной плоскости телескопа рассчитаем следующий интеграл:

$$<I(F,\rho)>=\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 W(\rho_1)W^*(\rho_2)G_0(F,\rho;0,\rho_1)\times$$

$$\times G_0^*(F,\rho;0,\rho_2)<\exp[i\Delta S(\rho_1)-i\Delta S(\rho_2)]>. \qquad (24)$$

Последний член, стоящий в скобках <...> усреднения, выражается через структурную функцию фазы следующим образом:

$$<\exp[i\Delta S(\rho_1)-i\Delta S(\rho_2)]>=\exp(-\frac{1}{2}<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2>). \qquad (25)$$

При дальнейших расчетах в (25) воспользуемся выражениями (4), (5), а также для простоты представления членов, стоящих под знаком усреднения, применим запись следующего вида:

$$<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2>=$$

$$=2\pi k^2\int_0^X d\xi\iint d^2\kappa\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\{<[\rho_1]\cdot[\rho_1]^*>+<[\rho_2]\cdot[\rho_2]^*>-$$

$$-<[\rho_1]\cdot[\rho_2]^*>-<[\rho_2]\cdot[\rho_1]^*>\}. \qquad (26)$$

Такая схема записи станет понятной из дальнейшего рассмотрения. Первый член в фигурной скобке в выражении (26) дается следующей формулой:

$$<[\rho_1]\cdot[\rho_1]^*>=$$

$$=<\{\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho_1)-\exp[i\boldsymbol{\kappa}\rho_1(1-\xi/X)+i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]\}\times$$

$$\times\{\exp(i\boldsymbol{\kappa}\rho_1)-\exp[i\boldsymbol{\kappa}\rho_1(1-\xi/X)+i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]\}>=$$

$$=2-<\exp[-i\boldsymbol{\kappa}\rho_1(\xi/X)+i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]>-$$

$$-<\exp[i\boldsymbol{\kappa}\rho_1(\xi/X)-i\boldsymbol{\kappa}\rho_{\text{л.п}}(\xi/X)]>. \qquad (27)$$

После проведенного в (27) усреднения по случайным реализациям положения ЛОЗ, т.е. по случайным реализациям положения центра тяжести лазерной опорной звезды $\rho_{\text{л.п}}$, получаем

$$<[\rho_1]\cdot[\rho_1]^*>=$$

$$=2[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos(\boldsymbol{\kappa}\rho_1(\xi/X)]. \qquad (28)$$

Проводя расчет подобным образом в других слагаемых (26), получаем, например:

$$<[\rho_1]\cdot[\rho_2]^*>=2\{\cos\boldsymbol{\kappa}(\rho_1-\rho_2)+\cos\boldsymbol{\kappa}(\rho_1-\rho_2)(1-\xi/X)-$$

$$-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos\boldsymbol{\kappa}[(\rho_1-\rho_2)-\rho_1(\xi/X)]-$$

$$-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos\boldsymbol{\kappa}[(\rho_1-\rho_2)+\rho_2(\xi/X)]\}. \qquad (29)$$

Наконец, суммируя результаты расчетов для всех составляющих из (27), имеем

$$<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2>=4\pi k^2\int_0^X d\xi\iint d^2\kappa\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\times$$

$$\times\{[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos(\boldsymbol{\kappa}\rho_1(\xi/X)]+$$

$$+[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos(\boldsymbol{\kappa}\rho_2(\xi/X)]-$$

$$-[\cos\boldsymbol{\kappa}(\rho_1-\rho_2)+\cos\boldsymbol{\kappa}(\rho_1-\rho_2)(1-\xi/X)-$$

$$-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos\boldsymbol{\kappa}[(\rho_1-\rho_2)-\rho_1(\xi/X)]-$$

$$-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)\cos\boldsymbol{\kappa}[(\rho_1-\rho_2)+\rho_2(\xi/X)]]\}. \qquad (30)$$

После вычисления выражения (30) для структурной функции остаточной фазы из (25) его надо подставить в (24). Аналитический расчет выражения (30) осуществляется примерно так же, как и при вычислении дисперсии. Прежде всего, еще раз преобразуем (30) в предположении изотропности спектра турбулентности $\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)$, тогда оно перепишется в виде

$$<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2>=8\pi^2 k^2\int_0^X d\xi\iint d^2\kappa\Phi_n(\boldsymbol{\kappa},\xi)\times$$

$$\times\{[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)J_0(\kappa\rho_1(\xi/X)]+$$

$$+[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)J_0(\kappa\rho_2(\xi/X)]+$$

$$+[1-J_0(\kappa|\rho_1-\rho_2|)]+[1-J_0(\kappa|\rho_1-\rho_2|(1-\xi/X))]-$$

$$-[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)J_0(\kappa|(\rho_1-\rho_2)-\rho_1(\xi/X)|)]-$$

$$-[1-\exp(-\frac{\kappa^2}{2}<\rho^2_{\text{л.п}}>(\xi/X)^2)J_0(\kappa|(\rho_1-\rho_2)+\rho_2(\xi/X)|)]\}. \qquad (31)$$

Для больших апертур, когда $D\gg\sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}$, член, стоящий в фигурной скобке в (31), представляет собой многочлен в степени 5/3:

$$\{\ldots\}=\rho_1^{5/3}(\xi/X)^{5/3}+\rho_2^{5/3}(\xi/X)^{5/3}+$$

$$+|\rho_1-\rho_2|^{5/3}+|\rho_1-\rho_2|^{5/3}(1-\xi/X)^{5/3}-$$

$$-|(\rho_1-\rho_2)-\rho_1(\xi/X)|^{5/3}-|(\rho_1-\rho_2)+\rho_2(\xi/X)|^{5/3}. \qquad (32)$$

Если в (32) воспользоваться квадратичной аппроксимацией, то получаем, что структурная функция фазы будет иметь вид

$$<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2>=8\pi^2 k^2 0{,}033(-\Gamma(-5/6)/\Gamma(11/6))\times$$

$$\times\int_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}|\rho_1-\rho_2|^{5/3}. \qquad (33)$$

Очевидно, что структурная функция фазы насыщается на удвоенное значение дисперсии (13), которое рассчитывается для всей апертуры телескопа D. В результате, с учетом формул (16), (19), получаем в качестве предельного значения структурной функции остаточных фазовых искажений из (31) следующее выражение:

$$<[\Delta S(\rho_1)-\Delta S(\rho_2)]^2> \approx$$
$$\approx \begin{cases} 2{,}89k^2\left(\frac{<\rho^2_{\text{л.п}}>}{2}\right)^{5/6}\left[1+0{,}42\frac{D^2}{<\rho^2_{\text{л.п}}>}\right]\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}, \\ \qquad D<\sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}, \\ 2{,}89k^2D^{5/3}\int\limits_0^X d\xi C_n^2(\xi)(\xi/X)^{5/3}, \ D\gg\sqrt{<\rho^2_{\text{л.п}}>}. \end{cases} \tag{34}$$

Таким образом, зная вертикальный профиль турбулентности, можно с использованием достаточно простых вычислений оценить уровень (дисперсию и структурную функцию) остаточных фазовых искажений, обусловленных тем, что опорная звезда, формируемая с Земли, представляет собой сферическую волну со случайным центром излучения.

Если оценить параметр Штреля, исходя из работ [2, 3, 13–15], по формуле

$$\text{St} \approx \exp(-<[\Delta S(D)]^2>),$$

то становится понятно, что наличие остаточных фазовых искажений будет уменьшать предельно достижимую величину этого параметра и тем самым снижать эффективность коррекции с точки зрения ограничения предельных возможностей повышения потенциала телескопа.

Заключение

Таким образом, в результате аналитических расчетов удалось показать, что при коррекции аберраций волнового фронта с помощью сигнала от лазерной опорной звезды имеют место остаточные фазовые искажения. Эти искажения обусловлены тем, что опорная звезда формируется с помощью фокусированного лазерного пучка, направляемого из телескопа (с поверхности Земли) и она фактически представляет собой сферическую волну со случайным центром. В приближении метода Гюйгенса–Френеля были рассчитаны статистические моменты распределения остаточных искажений для высших аберраций фазовых флуктуаций. Обсуждается вопрос об ограничениях эффективности коррекции при использования такой звезды при определенном значении турбулентных флуктуаций. Показано, что для телескопов как с предельно малыми, так и с предельно большими апертурами эти ограничения несущественны. Наиболее сильное влияние этот эффект будет оказывать на телескопы с апертурами порядка нескольких метров.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта программы совместного конкурса НАН Украины–СО РАН (2013–1014) и программ ФЦП Минобрнауки России (соглашение 8877, соглашение 8703).

1. *Fugate R.* Laser beacon adaptive optics // Optics & Photonics News. 1993. V. 4, N 6. P. 14–19.
2. *Ragazzoni R.* Absolute tip-tilt determination with laser beacons // Astron. Astrophys. 1996. V. 305, N 3. P. L13–L16.
3. *Больбасова Л.А., Лукин В.П.* Исследование эффективности применения лазерных опорных звезд // Оптика атмосф. и океана. 2009. Т. 22, № 8. С. 807–814.
4. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
5. *Зуев В.Е., Коняев П.А., Лукин В.П.* Минимизация атмосферных искажений оптических волн методами адаптивной оптики // Изв. вузов. Физ. 1985. № 11. С. 6–29.
6. *Lukin V.P.* Efficiency of some correction systems // Opt. Lett. 1979. V. 4, N 1. P. 15–17.
7. *Fortes B.V., Lukin V.P.* Modeling of the image observed through the turbulent atmosphere // Proc. SPIE. 1992. V. 1688. P. 477–488.
8. *Больбасова Л.А., Лукин В.П., Носов В.В.* О дрожании изображения лазерной опорной звезды в моностатической схеме формирования // Оптика и спектроскопия. 2009. Т. 107, № 5. С. 830–838.
9. *Bolbasova L.A., Lukin V.P.* Modal phase correction for large-aperture ground-based telescope with multi-guide stars // Proc. SPIE. 2009. V. 7476. P. 74760M01–74760M08.
10. *Beland R.R., Brown J.H.* A deterministic temperature model for stratospheric optical turbulence // Phys. Scripta. 1988. V. 37, N 2. P. 419–423.
11. *Больбасова Л.А., Лукин В.П.* Адаптивная коррекция атмосферных искажений оптических изображений на основе искусственного опорного источника. М.: Физматлит, 2012. 125 с.
12. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66, N 3. P. 207–211.
13. *Больбасова Л.А., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов В.В., Торгаев А.В.* Особенности дрожания изображения оптического источника в случайной среде с конечным внешним масштабом // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 10. С. 845–851.
14. *Антошкин Л.В., Ботыгина Н.Н., Емалеев О.Н., Ковадло П.Г., Коняев П.А., Копылов Е.А., Лукин В.П., Трифонов В.Д.* Эффективность использования управляемого зеркала DM2-100-31 в адаптивной системе Большого солнечного вакуумного телескопа // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 12. С. 1096–1098.
15. *Лукин В.П.* Адаптивная система формирования лазерных пучков в атмосфере, использующая некогерентные изображения в качестве опорных источников // Оптика атмосф. и океана. 2013. Т. 26, № 2. С. 175–181.

L.A. Bolbasova, V.P. Lukin. **Residual phase distortions at correction with laser guide star.**

With the advent technology of the laser guide stars the problem of general tilt wave front correction appears. The high aberrations of the wave front are corrected by means of signal from laser guide star. However, whereas such star is formed by means of laser beam, directed from telescope, it can be represented as spherical wave with random center position. Residual distortions of high aberration phase fluctuations in such presentation with calculation in the Huigens–Fresnel's approximation are executed.