

В.Г. Гусев

## Аберрации голограммы Габора при формировании в диффузно рассеянных полях интерферограммы бокового сдвига для контроля волнового фронта

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 30.01.2001 г.

В третьем порядке приближения анализируются запись и восстановление двухэкспозиционной голограммы Габора амплитудного рассеивателя для контроля волнового фронта. Показано, что ошибки контроля обусловлены сферической аберрацией голограммы.

В [1] было показано, что двухэкспозиционная запись голограммы Габора амплитудного рассеивателя приводит к формированию на стадии ее восстановления интерферограммы бокового сдвига в полосах бесконечной ширины, характеризующей волновой фронт когерентного излучения, которое использовалось для освещения рассеивателя. При этом механизм образования интерференционной картины сводится к необходимости совмещения объективных спеклов двух экспозиций в плоскости фотопластинки на стадии записи голограммы. Совмещение спеклов выполняется путем изменения угла наклона контролируемого волнового фронта и поперечного сдвига фотопластинки перед ее повторным экспонированием. Причем совмещение объективных спеклов двух экспозиций можно осуществлять как для сходящегося, так и для расходящегося квазисферического волнового фронта.

Локализуемая в плоскости голограммы интерференционная картина регистрируется на стадии ее восстановления при проведении пространственной фильтрации дифракционного поля на оптической оси в плоскости формирования действительного изображения амплитудного рассеивателя. В цитируемой выше работе для обоснования условий образования интерференционной картины в когерентных диффузно рассеянных полях использовалось параболическое приближение для комплексной амплитуды поля, которое не учитывает возможных ошибок контроля, обусловленных монохроматическими аберрациями голограммы.

В настоящей статье анализируется в третьем порядке приближения для комплексной амплитуды поля образование интерферограммы бокового сдвига, характеризующей контролируемый волновой фронт, с целью получения оценки возможных ошибок контроля из-за монохроматических аберраций голограммы.

Согласно рис. 1, а амплитудный рассеиватель 1, находящийся в плоскости  $(x_1, y_1)$ , освещается когерентным излучением с расходящейся квазисферической волной радиусом кривизны  $R$ . Рассеянное им излучение с когерентным фоном регистрируется на фотопластинке 2, расположенной в плоскости  $(x_2, y_2)$  на расстоянии  $l$ , за время первой экспозиции. Перед повторным экспонированием, как и в [1], изменяется угол наклона контролируемого волнового фронта, например в плоскости  $(x, z)$ , на величину  $\alpha$  и смещается фотопластинка на величину  $b$  в том же направлении по оси  $x$ . Тогда без учета постоянных множителей в третьем порядке приближения распределение комплексной амплитуды поля в плоскости  $(x_2, y_2)$ , соответствующее первой экспозиции, запишем в виде

$$u_1(x_2, y_2) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - t(x_1, y_1)] \times \exp \left\{ i \left\{ k \left[ \frac{1}{2R} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{8R^3} (x_1^2 + y_1^2)^2 \right] - \varphi(x_1, y_1) \right\} \right\} \times \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \right\} \times \exp \left\{ -\frac{ik}{8l^3} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^2 \right\} dx_1 dy_1, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число;  $t(x_1, y_1)$  – амплитуда поглощения рассеивателя, являющаяся случайной функцией координат;  $\varphi(x_1, y_1)$  – детерминированная функция, характеризующая искажение волны излучения, используемого для освещения амплитудного рассеивателя, например из-за аберраций формирующей ее оптической системы.

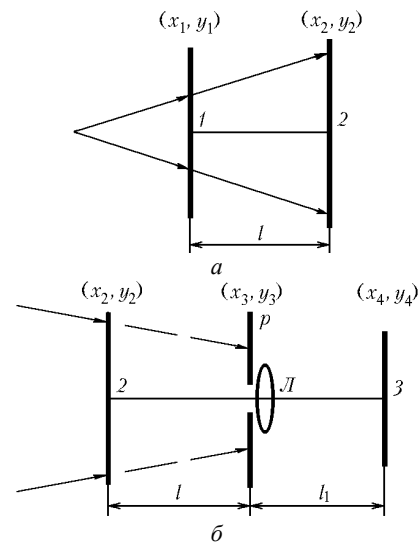


Рис. 1. Схема записи (а) и восстановления (б) двухэкспозиционной голограммы Габора: 1 – амплитудный рассеиватель; 2 – фотопластинка-голограмма; 3 – плоскость регистрации интерферограммы;  $L$  – положительная линза;  $p$  – пространственный фильтр

Выражение (1) можно представить в следующей форме:

$$u_1(x_2, y_2) \sim \exp \left\{ ik \left[ \frac{1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{8l^3} (x_2^2 + y_2^2)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ [\delta(x_2, y_2) - F(x_2, y_2)] \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \otimes \right. \\ \left. \otimes \Phi(x_2, y_2) \otimes \Phi_1(x_2, y_2) \otimes \Phi_2(x_2, y_2) \otimes \Phi_3(x_2, y_2) \right\}, \quad (2)$$

где  $\otimes$  – символ операции свертки;  $\delta(x_2, y_2)$  – дельта-функция Дирака;  $\mu_1 = R/(R+l)$  – масштабный коэффициент;

$$F(x_2, y_2), \Phi(x_2, y_2), \Phi_1(x_2, y_2), \Phi_2(x_2, y_2), \Phi_3(x_2, y_2)$$

– Фурье-образы соответственно функций

$$t(x_1, y_1), \exp[-i\varphi(x_1, y_1)], \exp \left[ -\frac{ik}{8R^3} (x_1^2 + y_1^2)^2 \right], \\ \exp \left[ -\frac{ik}{8l^3} (x_1^2 + y_1^2)^2 \right], \exp[i\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2)]$$

с пространственными частотами  $x_2/\lambda l, y_2/\lambda l$ ;  $\lambda$  – длина волны когерентного источника света, используемого для записи и восстановления голограммы;

$$\Psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2) =$$

$$= -\frac{k}{8l^3} (6x_1^2 x_2^2 + 6y_1^2 y_2^2 - 4x_1^3 x_2 - 4x_1^2 y_1 y_2 + 2x_1^2 y_2^2 - \\ - 4x_1 x_2^3 - 4x_1 y_1^2 y_2 + 8x_1 y_1 x_2 y_2 - 4x_1 x_2 y_2^2 + 2y_1^2 x_2^2 - \\ - 4y_1 x_2^2 y_2 - 4y_1^3 y_2 - 4y_1 y_2^3)$$

– фазовая функция, характеризующая внеосевые волновые aberrации третьего порядка.

Используя условие  $t(x_1, y_1) \ll 1$  [2], найдем комплексную амплитуду  $\tau_1(x_2, y_2)$  пропускания голограммы при условии выполнения ее записи на линейном участке кривой почернения фотоматериала. Без учета регулярной составляющей, занимающей на стадии восстановления голограммы малую область пространства [1] в плоскости регистрации интерференционной картины, она определяется выражением

$$\tau_1(x_2, y_2) \sim \left\{ \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \otimes \right. \\ \left. \otimes \Phi^*(x_2, y_2) \otimes \Phi_1^*(x_2, y_2) \otimes \Phi_2^*(x_2, y_2) \right\} \times \\ \times \left\{ F(x_2, y_2) \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \otimes \Phi(x_2, y_2) \otimes \right. \\ \left. \otimes \Phi_1(x_2, y_2) \otimes \Phi_2(x_2, y_2) \otimes \Phi_3(x_2, y_2) \right\} + \text{к.с.}, \quad (3)$$

где к.с. означает комплексное сопряжение.

Первое слагаемое  $-\tau_1^{(-1)}(x_2, y_2)$  – в выражении (3) определяет на стадии восстановления голограммы последующую дифракцию волны в  $(-1)$  порядке, а второе слагаемое  $-\tau_1^{(+1)}(x_2, y_2)$  – в  $(+1)$  порядке.

Соответствующее второй экспозиции распределение комплексной амплитуды поля в плоскости  $(x_2, y_2)$  фотопластины запишем в виде

$$u_2(x_2, y_2) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - t(x_1, y_1)] \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{2R} [(x_1 + R \sin \alpha)^2 + y_1^2] - \varphi(x_1 + a, y_1) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{ik}{8R^3} [(x_1 + R \sin \alpha)^2 + y_1^2]^2 \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x_1 - x_2 - b)^2 + (y_1 - y_2)^2] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{8l^3} [(x_1 - x_2 - b)^2 + (y_1 - y_2)^2]^2 \right\} dx_1 dy_1, \quad (4)$$

где  $a$  – величина сдвига волнового фронта из-за изменения угла наклона перед повторным экспонированием.

Если  $b = l \sin \alpha$ , то комплексная амплитуда  $\tau_2(x_2, y_2) = \tau_2^{(-1)}(x_2, y_2) + \tau_2^{(+1)}(x_2, y_2)$  пропускания голограммы, которая соответствует второй экспозиции, определяется выражением

$$\tau_2(x_2, y_2) \sim \left\{ \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \otimes \right. \\ \left. \otimes \exp(-ikax_2/l) \Phi^*(x_2, y_2) \otimes \exp(-ikRbx_2/l^2) \times \right. \\ \left. \times \Phi \Phi_1^*(x_2, y_2) \otimes \exp(ikbx_2/l) \Phi_2^*(x_2, y_2) \right\} \times \\ \times \left\{ F(x_2, y_2) \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \otimes \exp(ikax_2/l) \times \right. \\ \left. \times \Phi(x_2, y_2) \otimes \exp(ikRbx_2/l^2) \Phi_1(x_2, y_2) \otimes \right. \\ \left. \otimes \exp(-ikbx_2/l) \Phi_2(x_2, y_2) \otimes \right. \\ \left. \otimes \exp(-ikbx_2/l) \Phi_3(x_2, y_2) \right\} + \text{к.с.} \quad (5)$$

Как представлено на рис. 1, б, на стадии восстановления двухэкспозиционная голограмма освещается когерентным излучением со сходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r = R + l$ . На оптической оси в плоскости  $(x_3, y_3)$  проводится пространственная фильтрация дифракционного поля с помощью непрозрачного экрана  $p$  с круглым отверстием и регистрируется интерференционная картина, локализуемая в плоскости голограммы. Положительная линза  $L$  строит изображение голограммы в плоскости  $(x_4, y_4)$ .

В используемом приближении распределение комплексной амплитуды волны когерентного излучения, ис-

пользуемого на стадии восстановления голограммы, в плоскости  $(x_2, y_2)$  принимает вид

$$u_0(x_2, y_2) \sim \exp \left\{ i \left[ -\frac{k}{2(R+l)} (x_2^2 + y_2^2) + \frac{k}{8(R+l)^3} (x_2^2 + y_2^2)^2 + \varphi_0(x_2, y_2) \right] \right\}, \quad (6)$$

где  $\varphi_0(x_2, y_2)$  – детерминированная функция, характеризующая возможные искажения волны, например, из-за aberrаций формирующей ее оптической системы.

Восстановление двухэкспозиционной голограммы рассмотрим в порядках дифракции отдельно, так как отсутствует корреляция между их спекл-полями [3]. Тогда без учета пространственной ограниченности поля из-за конечных размеров голограммы распределение его комплексной амплитуды в плоскости  $(x_3, y_3)$  для (+1) порядка дифракции определяется выражением

$$u^{(+1)}(x_3, y_3) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tau_1^{(+1)}(x_2, y_2) + \tau_2^{(+1)}(x_2, y_2)] \times \\ \times u_0(x_2, y_2) \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{8l^3} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^2 \right\} dx_2 dy_2. \quad (7)$$

В результате подстановки соответствующих функций в (7) и использования при этом интегрального представления операции свертки для опорной волны в  $\tau_1^{(+1)}(x_2, y_2)$  и в  $\tau_2^{(+1)}(x_2, y_2)$  получим

$$u^{(+1)}(x_3, y_3) \sim \exp \left\{ ik \left[ \frac{1}{2l} (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{8l^3} (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \Phi_0(x_3, y_3) \otimes \Phi_2'(x_3, y_3) \otimes \Phi_3'(x_3, y_3) \otimes \right. \\ \otimes \Phi_4(x_3, y_3) \otimes \left. \left[ \Phi_5(x_3, y_3) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes \right. \right. \\ \otimes t(x_3, y_3) A(x_3, y_3; x_2, y_2) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ \varphi(x_3, y_3) + \frac{k}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l^3} \right) (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] \right\} + \\ \left. \left. + \Phi_5'(x_3, y_3) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes t(x_3, y_3) \times \right. \right. \\ \times A(x_3 - b, y_3; x_2, y_2) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ \left. \left. \times \exp[i\varphi(x_3 + a, y_3)] \exp \left\{ \frac{ik}{8R^3} [(x_3 + Rb/l)^2 + y_3^2]^2 \right\} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left\{ \frac{ik}{8l^3} [(x_3 - b)^2 + y_3^2]^2 \right\} \right\}, \quad (8)$$

где

$$A(x_3, y_3; x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2)] \times \\ \times \exp \{ ik[(x_1 - x_3)x_2 + (y_1 - y_3)y_2/l] \} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

– комплексная функция, являющаяся результатом вычислений в каждой точке голограммы;

$$\Phi_0(x_3, y_3), \Phi_2'(x_3, y_3), \Phi_3'(x_3, y_3), \Phi_4(x_3, y_3), \Phi_5(x_3, y_3), \\ \Phi_5'(x_3, y_3)$$

– Фурье-образы соответственно функций

$$\exp[i\varphi_0(x_2, y_2)], \exp \left[ -\frac{ik}{8l^3} (x_2^2 + y_2^2)^2 \right],$$

$$\exp[i\psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3)], \exp \left[ \frac{ik}{8(R+l)^3} (x_2^2 + y_2^2)^2 \right],$$

$$B_1(x_2, y_2) =$$

$$= \exp \left\{ -i \left[ \varphi(\mu_1 x_2, \mu_1 y_2) + \frac{k\mu_1^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l^3} \right) (x_2^2 + y_2^2)^2 \right] \right\},$$

$$B_2(x_2, y_2) = \exp \left\{ -i \left[ \varphi(\mu_1 x_2 + a, \mu_1 y_2) + \frac{k}{8R^3} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [(\mu_1 x_2 + Rb/l)^2 + \mu_1^2 y_2^2]^2 + \frac{k}{8l^3} [(\mu_1 x_2 - b)^2 + \mu_1^2 y_2^2]^2 \right] \right\}$$

с пространственными частотами  $x_3/\lambda l$ ,  $y_3/\lambda l$ ; функция  $\psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3)$  имеет вид функции  $\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$  при соответствующей замене переменных.

Из выражения (8) следует, что в плоскости формирования действительного изображения амплитудного рассеивателя световое поле представляет собой объективное спекл-поле. При этом по сравнению с дифракционным пределом, определяемым размером голограммы [4], объективный спекл уширен на величину, которая определяется шириной функции

$$\Phi_0(x_3, y_3) \otimes \Phi_2'(x_3, y_3) \otimes \Phi_3'(x_3, y_3) \otimes \Phi_4(x_3, y_3) \otimes \\ \otimes \Phi_5(x_3, y_3) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right].$$

Кроме того, информация о неизвестной фазовой функции  $\varphi(x_1, y_1)$  содержится, с одной стороны, в пределах каждого объективного спекла в плоскости  $(x_3, y_3)$ . С другой стороны, эта фазовая функция модулирует в указанной плоскости спекл-поле.

Совпадение идентичных спеклов двух экспозиций в плоскости формирования действительного изображения амплитудного рассеивателя обуславливает локализацию в ней модулирующей объективную спекл-структуру интерференционной картины вида

$$I(x_3, y_3) \sim 1 + \cos[\varphi(x_3 + a, y_3) - \varphi(x_3, y_3) + \psi(x_3, y_3; b)],$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x_3, y_3; b) = & \frac{k}{8} \left[ 4x_3^3 \left( \frac{1}{R^2 l} - \frac{1}{l^3} \right) b + (6x_3^2 + 2y_3^2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{1}{Rl^2} + \frac{1}{l^3} \right) b^2 + 4x_3 y_3^2 \left( \frac{1}{R^2 l} - \frac{1}{l^3} \right) b \right]. \end{aligned}$$

При этом пространственная протяженность интерференционной картины с высокой контрастностью ограничивается из-за внесосевых волновых aberrаций голограммы. Оценку величины диаметра в плоскости  $(x_3, y_3)$ , в пределах которого будет высокая контрастность интерференционной картины, можно выполнить, используя то обстоятельство, что наибольшая величина изменения фазы  $\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$  имеет место на оси сдвига для aberrации типа комы [5].

При проведении пространственной фильтрации дифракционного поля на оптической оси (см. рис. 1, б), когда диаметр фильтрующего отверстия не превосходит ширины интерференционной полосы, можно считать, что с учетом достаточной его малости  $\Phi'_3(x_3, y_3) = \delta(x_3, y_3)$ . Тогда распределение комплексной амплитуды поля на выходе пространственного фильтра определяется выражением

$$\begin{aligned} u^{(+1)}(x_3, y_3) \sim & p(x_3, y_3) \exp \left[ \frac{ik}{2l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ & \times \left\{ \Phi_0(x_3, y_3) \otimes \Phi'_2(x_3, y_3) \otimes \Phi_4(x_3, y_3) \otimes \right. \\ & \otimes \left\{ [\Phi_5(x_3, y_3) + \Phi'_5(x_3, y_3)] \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes \right. \\ & \left. \left. \otimes t(x_3, y_3) \exp \left[ -\frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \right\} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $p(x_3, y_3)$  – функция пропускания пространственного фильтра [6].

Положим, что линза  $L$  (рис. 1, б) с фокусным расстоянием  $f$  находится в плоскости  $(x_3, y_3)$ . Кроме того, для сокращения записи будем считать, что  $f = l/2$  и  $l_1 = l$ , где  $l_1$  – расстояние между плоскостями  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ . Тогда, используя приближение Френеля, так как учет более высокого порядка приближения приводит только к изменению в распределении субъективных спеклов в плоскости регистрации 3 интерференционной картины, которая модулирует спекл-структуру, определим комплексную амплитуду в плоскости  $(x_4, y_4)$ . Без учета несущественного для дальнейшего рассмотрения множителя, характеризующего распределение фазы сферической волны, она принимает вид:

$$\begin{aligned} u^{(+1)}(x_4, y_4) \sim & \\ \sim & \exp \left\{ i \left\{ \varphi_0(-x_4, -y_4) + \frac{k}{8} \left[ \frac{1}{(R+l)^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_4^2 + y_4^2)^2 \right\} \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \otimes \left\{ \exp \left\{ -i\varphi(-\mu_1 x_4, -\mu_1 y_4) + \frac{k\mu_1^4}{8} \right\} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right\} \times \exp [-i\varphi(-\mu_1 x_4 + a, -\mu_1 y_4)] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{ik\mu_1^4}{8R^3} [(x_4 - Rb/\mu_1 l)^2 + y_4^2]^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{ik\mu_1^4}{8l^3} [(x_4 + b/\mu_1)^2 + y_4^2]^2 \right\} \left. \right\} \times \\ & \times \left\{ F_1(x_4, y_4) \otimes \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \right\} \otimes P(x_4, y_4), \quad (10) \end{aligned}$$

где  $F_1(x_4, y_4)$ ,  $P(x_4, y_4)$  – Фурье-образы соответственно функций  $t(x_3, y_3)$ ,  $p(x_3, y_3)$  с пространственными частотами  $x_4/\lambda l$ ,  $y_4/\lambda l$ .

Из-за медленности изменения с координатой функции

$$\begin{aligned} & \exp [-i\varphi(-\mu_1 x_4, -\mu_1 y_4)] + \\ & + \exp [-i\varphi(-\mu_1 x_4 + a, -\mu_1 y_4) - \psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b) = & \frac{k}{8} \left[ 4x_4^3 \left( \frac{\mu_1^2}{l^3} - \frac{\mu_1^2}{R^2 l} \right) (\mu_1 b) + (6x_4^2 + 2y_4^2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{1}{l^3} + \frac{1}{Rl^2} \right) (\mu_1 b)^2 + 4x_4 y_4^2 \left( \frac{\mu_1^2}{l^3} - \frac{\mu_1^2}{R^2 l} \right) (\mu_1 b) \right], \end{aligned}$$

вынесем ее в выражении (10) из-под знаков интегралов свертки. Тогда распределение освещенности в плоскости  $(x_4, y_4)$  в (+1) порядке дифракции определяется выражением

$$\begin{aligned} I^{(+1)}(x_4, y_4) \sim & \{1 + \cos[\varphi(-\mu_1 x_4 + a, -\mu_1 y_4) - \\ & - \varphi(-\mu_1 x_4, -\mu_1 y_4) + \psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b)]\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left\{ i \left\{ \varphi_0(-x_4, -y_4) + \frac{k}{8} \left[ \frac{1}{(R+l)^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_4^2 + y_4^2)^2 \right\} \right\} \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ F_1(x_4, y_4) \otimes \exp \left[ \frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \right\} \otimes P(x_4, y_4)^2. \quad (11) \end{aligned}$$

Как следует из выражения (11), в плоскости формирования изображения голограммы субъективная спекл-структура промодулирована интерференционными полосами. Интерференционная картина имеет вид интерферограммы бокового сдвига в полосах бесконечной ширины, которая характеризует контролируемый волновой фронт. При этом из-за сферической aberrации голограммы она может быть искажена, если функция  $\psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b)$  не равна нулю.

Пусть диаметр  $D$  контролируемого волнового фронта удовлетворяет области используемого приближения, т.е.

$$2^4 \sqrt{0,8\lambda l^3} \leq D(2R+l) / R \leq 2^6 \sqrt{1,6\lambda l^5}.$$

Тогда для исключения ошибки контроля можно найти максимально допустимую величину бокового сдвига, которая не превосходит оптимальной величины и для которой можно считать, что  $\psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b) = 0$ . Исходя из критерия точности определения фазы, равной  $0,1 \cdot 2\pi$ , и максимального ее изменения на оси сдвига, из выражения для функции  $\psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b)$  максимально допустимая величина бокового сдвига является результатом решения уравнения

$$6 \left( \frac{1}{l^3} + \frac{1}{Rl^2} \right) (D/2)^2 (\mu_1 b)^2 + 4 \left( \frac{\mu_1^2}{l^3} - \frac{\mu_1^2}{R^2 l} \right) (D/2)^3 (\mu_1 b) - 0,8\lambda = 0.$$

Для (-1) порядка дифракции распределение комплексной амплитуды поля двух экспозиций в плоскости  $(x_3, y_3)$  (см. рис. 1, б), когда  $R > l$ , принимает вид

$$\begin{aligned} u^{(-1)}(x_3, y_3) \sim & \exp \left\{ ik \left[ \frac{1}{2l} (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{8l^3} (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \Phi_0(x_3, y_3) \otimes \Phi_2'(x_3, y_3) \otimes \Phi_3'(x_3, y_3) \otimes \Phi_4(x_3, y_3) \otimes \right. \\ & \otimes \exp \left[ -\frac{ik}{4\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes \left\{ \tilde{\Phi}_5(x_3, y_3) \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes \right. \\ & \otimes t(-x_3, -y_3) A^*(-x_3, -y_3; x_2, y_2) \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ i \left[ \varphi(-x_3, -y_3) + \frac{k}{8} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] \right\} + \\ & + \tilde{\Phi}_5'(x_3, y_3) \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes t(-x_3, -y_3) \times \\ & \times A^*(-x_3 - b, -y_3; x_2, y_2) \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ & \times \exp[-i\varphi(-x_3 + a, -y_3)] \exp \left\{ -\frac{ik}{8R^3} [(x_3 - Rb/l)^2 + y_3^2]^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{ik}{8l^3} [(x_3 + b)^2 + y_3^2]^2 \right\} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tilde{\Phi}_5(x_3, y_3)$ ,  $\tilde{\Phi}_5'(x_3, y_3)$  – Фурье-образы соответственно функций  $B_1^*(x_2, y_2)$ ,  $B_2^*(x_2, y_2)$  с пространственными частотами  $x_3/\lambda l$ ,  $y_3/\lambda l$ .

С учетом медленности изменения с координатой функции  $\exp[-i\varphi(-x_3, -y_3)] + \exp\{-i[\varphi(-x_3 + a, -y_3) + \psi(x_3, y_3; -b)]\}$ , по сравнению с функцией  $\exp\left[-\frac{ik}{4\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2)\right]$ , и предположения, что в пределах диаметра фильтрующего отверстия

$$\varphi(-x_3 + a, -y_3) - \varphi(-x_3, -y_3) + \psi(x_3, y_3; -b) \leq \pi,$$

распределение комплексной амплитуды поля на выходе пространственного фильтра определяется выражением

$$\begin{aligned} u^{(-1)}(x_3, y_3) \sim & p(x_3, y_3) \exp \left[ \frac{ik}{2l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ & \times \left\{ \Phi_0(x_3, y_3) \otimes \Phi_2'(x_3, y_3) \otimes \Phi_4(x_3, y_3) \otimes \right. \\ & \otimes \exp \left[ -\frac{ik}{4\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes \left\{ [\tilde{\Phi}_5(x_3, y_3) + \tilde{\Phi}_5'(x_3, y_3)] \times \right. \\ & \times \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \otimes t(-x_3, -y_3) \exp \left[ \frac{ik}{2\mu_1 l} (x_3^2 + y_3^2) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как и для расчета распределения комплексной амплитуды поля в плоскости  $(x_4, y_4)$  (см. рис. 1, б) в (+1) порядке дифракции, воспользуемся приближением Френеля. Тогда в (-1) порядке дифракции распределение комплексной амплитуды поля в указанной плоскости на основании выражения (13) принимает вид

$$\begin{aligned} u^{(-1)}(x_4, y_4) \sim & \\ & \sim \exp \left\{ i \left\{ \varphi_0(-x_4, -y_4) + \frac{k}{8} \left[ \frac{1}{(R+l)^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_4^2 + y_4^2)^2 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{k\mu_1}{l} (x_4^2 + y_4^2) \right\} \left\{ \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \otimes \right. \\ & \otimes \left\{ \exp \left\{ i \left[ \varphi_0(-\mu_1 x_4, -\mu_1 y_4) + \frac{k\mu_1^4}{8} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \right\} + \right. \\ & + \exp[i\varphi(-\mu_1 x_4 + a, -\mu_1 y_4)] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{ik\mu_1^4}{8R^3} [(x_4 - Rb/\mu_1 l)^2 + y_4^2]^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{ik\mu_1^4}{8l^3} [(x_4 + b/\mu_1 l)^2 + y_4^2]^2 \right\} \left. \right\} \times \\ & \left\{ F_2(x_4, y_4) \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \right\} \otimes P(x_4, y_4), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $F_2(x_4, y_4)$  – Фурье-образ функции  $t(-x_3, -y_3)$  с пространственными частотами  $x_4/\lambda l$ ,  $y_4/\lambda l$ .

На основании (14) и вышеуказанных положений при вычислении значения  $I^{(+1)}(x_4, y_4)$  распределение освещенности в плоскости  $(x_4, y_4)$  в (-1) порядке дифракции определяется выражением

$$\begin{aligned} I^{(-1)}(x_4, y_4) \sim & \{1 + \cos[\varphi(-\mu_1 x_4 + a, -\mu_1 y_4) - \\ & - \varphi(-\mu_1 x_4, -\mu_1 y_4) + \psi_1(x_4, y_4; \mu_1 b)]\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left\{ i \left\{ \varphi_0(-x_4, -y_4) + \frac{k}{8} \left[ \frac{1}{(R+l)^3} - \frac{1}{l^3} \right] (x_4^2 + y_4^2)^2 + \right. \right. \right. \\ & + \left. \frac{k\mu_1}{l} (x_4^2 + y_4^2) \right\} \left. \right\} \left\{ \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \otimes \right. \end{aligned}$$

$$\otimes \exp \left[ \frac{ik\mu_1^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \times \\ \times \left\{ F_2(x_4, y_4) \otimes \exp \left[ -\frac{ik\mu_1}{2l} (x_4^2 + y_4^2) \right] \right\} \otimes P(x_4, y_4) \Big|^2. \quad (15)$$

Особенность интерференционной картины, локализуемой в плоскости голограммы и соответствующей (-1) порядку дифракции, состоит в том, что ее пространственная протяженность в два раза меньше, чем в (+1) порядке. Это следует из выражений (10), (14), согласно которым световое поле отлично от нуля в пределах области существования функций  $\exp[-ik\mu_1[(x_4^2 + y_4^2)/2l]] \otimes t(-\mu_1x_4, -\mu_1y_4)$  для (+1) порядка дифракции и  $\exp[ik\mu_1[(x_4^2 + y_4^2)/l]] \otimes t(-2\mu_1x_4, -2\mu_1y_4) \exp[ik\mu_1[(x_4^2 + y_4^2)/l]]$  для (-1) порядка. Чтобы пространственная протяженность интерференционной картины в (-1) порядке дифракции соответствовала протяженности в (+1) порядке, необходимо на стадии восстановления голограммы проводить ее освещение когерентным излучением со сходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r < (R + l)/R$ . При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что в плоскости формирования действительного изображения амплитудного рассеивателя, находящегося на расстоянии  $l' < l(R + l)/2R$  от голограммы, уменьшается масштаб интерференционной картины. В связи с этим необходимо уменьшать максимально допустимый диаметр фильтрующего отверстия, что приводит к увеличению размера субъективного спекла в плоскости регистрации интерференционной картины. В результате этого может уменьшаться ее видность до нуля, когда размер спекла становится соизмерим с шириной интерференционной полосы [7].

Когда на стадии двухэкспозиционной записи голограммы  $R < l$ , то на стадии ее восстановления когерентным излучением со сходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r = R + l$  в распределении комплексной амплитуды поля в (-1) порядке дифракции на выходе голограммы присутствует распределение фазы сходящейся сферической волны. В результате этого пространственная протяженность интерференционной картины, которая регистрируется в (-1) порядке дифракции, соответствует ее протяженности в (+1) порядке при выполнении пространственной фильтрации дифракционного поля на расстоянии  $l$  от голограммы.

### Сходящийся квазисферический волновой фронт

При выполнении двухэкспозиционной записи голограммы, когда амплитудный рассеиватель освещается когерентным излучением со сходящейся квазисферической волной и  $R > l$ , для ее восстановления используется когерентное излучение с расходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r = R - l$  [1]. Проведение пространственной фильтрации дифракционного поля на оптической оси в плоскости формирования действительного изображения амплитудного рассеивателя позволяет осуществлять регистрацию интерференционной картины, которая локализуется в плоскости голограммы и характеризует контролируемый волновой фронт. Для используемого порядка приближения, когда диаметр

рядка приближения, когда диаметр контролируемого волнового фронта удовлетворяет условию

$$2\sqrt[4]{0,8\lambda l^3} \leq D(2R - l) / R \leq 2\sqrt[4]{1,6\lambda l^3},$$

модулирующая субъективную спекл-структуру интерференционная картина имеет вид

$$I(x_4, y_4) \sim 1 + \cos[\varphi(-\mu_2x_4 + a, -\mu_2y_4) - \\ - \varphi(-\mu_2x_4, -\mu_2y_4) + \psi_2(x_4, y_4; \mu_2b)],$$

где  $\mu_2 = R/(R - l)$  – масштабный коэффициент;

$$\psi_2(x_4, y_4; \mu_2b) = \frac{k}{8} \left[ 4x_4^3 \left( \frac{\mu_2^2}{R^2l} - \frac{\mu_2^2}{l^3} \right) (\mu_2b) + \right.$$

$$\left. + (6x_4^2 + 2y_4^2) \left( \frac{1}{Rl^2} - \frac{1}{l^3} \right) (\mu_2b)^2 + 4x_4y_4^2 \left( \frac{\mu_2^2}{R^2l} - \frac{\mu_2^2}{l^3} \right) (\mu_2b) \right]$$

– фазовая функция, которая обусловлена сферической aberrацией голограммы и которая определяет величину ошибки контроля волнового фронта.

Как и в случае контроля расходящегося квазисферического волнового фронта для  $R > l$ , пространственная протяженность регистрируемой интерференционной картины в (-1) порядке дифракции в два раза меньше, чем в (+1) порядке. Чтобы пространственная протяженность интерференционной картины, локализуемой в плоскости голограммы, для (-1) порядка дифракции соответствовала протяженности в (+1) порядке, необходимо на стадии восстановления голограммы проводить ее освещение когерентным излучением со сходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r < (R - l)/R$ . Тогда пространственную фильтрацию дифракционного поля следует проводить в плоскости формирования уменьшенного действительного изображения амплитудного рассеивателя, находящейся на расстоянии  $l'' \leq l(R - l)/2R$  от голограммы.

Если двухэкспозиционная запись голограммы выполняется, когда  $R < l$ , то для ее восстановления используется когерентное излучение со сходящейся квазисферической волной с радиусом кривизны  $r = l - R$ . Затем на расстоянии  $l$  от голограммы, где формируется действительное изображение амплитудного рассеивателя с единичным увеличением, проводится на оптической оси пространственная фильтрация дифракционного поля и регистрируется интерференционная картина, которая локализуется в плоскости голограммы и характеризует контролируемый волновой фронт. Для используемого порядка приближения, когда диаметр контролируемого волнового фронта удовлетворяет условию

$$2\sqrt[4]{0,8\lambda l^3} \leq Dl / R \leq 2\sqrt[4]{1,6\lambda l^3},$$

модулирующая субъективную спекл-структуру интерференционная картина имеет вид

$$I(x_4, y_4) \sim 1 + \cos[\varphi(\mu_3x_4 + a, \mu_3y_4) - \\ - \varphi(\mu_3x_4, \mu_3y_4) + \psi_3(x_4, y_4; \mu_3b)],$$

где  $\mu_3 = R/(l - R)$  – масштабный коэффициент;

$$\Psi_3(x_4, y_4; \mu_3 b) = \frac{k}{8} \left[ 4x_4^3 \left( \frac{\mu_3^2}{l^3} - \frac{\mu_3^2}{R^2 l} \right) (\mu_3 b) + \right. \\ \left. + (6x_4^2 + 2y_4^2) \left( \frac{1}{l^3} - \frac{1}{Rl^2} \right) (\mu_3 b)^2 + 4x_4 y_4^2 \left( \frac{\mu_3^2}{l^3} - \frac{\mu_3^2}{R^2 l} \right) (\mu_3 b) \right]$$

– фазовая функция, которая обусловлена сферической aberrацией голограммы и которая определяет величину ошибки контроля волнового фронта. Кроме того, в рассматриваемом случае пространственная протяженность интерференционной картины одинакова в (+1) и (–1) порядках дифракции. Это объясняется тем, что в (–1) порядке дифракции формируется уменьшенное действительное изображение амплитудного рассеивателя, которое находится на расстоянии  $l(l - R)/2R < l$  от голограммы [8].

Если пространственную фильтрацию дифракционного поля проводить в этой плоскости, то, помимо того, что необходимо уменьшать максимально допустимый диаметр фильтрующего отверстия, в плоскости регистрации интерференционной картины увеличивается пространственная протяженность области, которая обусловлена постоянной составляющей пропускания голограммы.

Таким образом, результаты проведенного анализа показали, что двухэкспозиционная запись голограммы амплитудного рассеивателя по схеме Габора для контроля волнового фронта сопровождается ошибками контроля из-за сферической aberrации голограммы, когда увеличивается

диаметр волнового фронта. В третьем порядке приближения для комплексной амплитуды поля можно определить возникающую систематическую ошибку, величина которой зависит от геометрических параметров схемы записи голограммы, величины бокового сдвига и длины волны когерентного источника света, используемого для записи и восстановления голограммы. При этом для известной величины диаметра контролируемого волнового фронта можно определить максимально допустимую величину бокового сдвига, которая не превосходит оптимальной величины и которая позволяет исключить ошибку контроля.

1. Гусев В.Г. Формирование в диффузно рассеянных полях интерферограмм бокового сдвига для контроля волнового фронта при двухэкспозиционной записи голограммы Габора // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. N 1. С. 12–17.
2. Gabor D. Microscopy by reconstructed wave fronts // Proc. Roy. Soc. 1949. V. A197. P. 454–487.
3. Гусев В.Г. Формирование в диффузно рассеянных полях спекл-интерферограмм бокового сдвига // Изв. вузов. Физ. 1996. N 9. С. 36–42.
4. Франсон М. Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 158 с.
5. Гусев В.Г. Двухэкспозиционная запись и восстановление безлинзовой голограммы Фурье матового экрана для контроля волнового фронта // Оптик. ж. 2001. Т. 68. N 5. С. 48–52.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
7. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия. М.: Мир, 1986. 320 с.
8. Гусев В.Г. Формирование голографических интерферограмм бокового сдвига для контроля волнового фронта // Оптик. ж. 2000. Т. 67. N 3. С. 62–65.

*V.G. Gusev. Aberration of Gabor hologram at formation of shear interferogram in diffusively scattered light for wavefront control.*

Record and reconstruction the two-exposure Gabor hologram of the amplitude screen wavefront control are described in the third-order approximation. It is shown that control errors are caused by spherical aberration of the hologram.