

Д.А. Маракасов

## О применении метода фазового экрана для анализа мерцаний звезд, вызванных флуктуациями показателя преломления в стратосферном слое

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 4.10.2004 г.

Исследуются мерцания звезд при затмении их атмосферой Земли. Рассмотрены факторы, определяющие точность приближения фазового экрана для описания прошедшей искажающей слой волны при наличии пространственной зависимости регулярной составляющей показателя преломления. Сделаны оценки соответствующих ошибок, и предложена возможность их компенсации.

### Введение

При наблюдении затмения звезд земной атмосферой с борта космической станции наряду с монотонным убыванием блеска звезды наблюдаются случайные изменения интенсивности принимаемого излучения [1–3]. Они связаны с рассеянием излучения звезды на атмосферных неоднородностях и несут существенную информацию о структуре флуктуаций плотности воздуха средней атмосферы.

Для исследования спектров мерцаний обычно используется приближение фазового экрана (ФЭ) [4, 5]. Считается, что это приближение обеспечивает хорошую точность описания электромагнитного поля при значительном удалении приемника от исследуемого слоя. Однако при этом не учитывается то, что влияние рефракции на характеристики рассеянного поля зависит от положения неоднородностей в слое. К таким характеристикам относятся, в частности, угол рассеяния и соотношение пространственного масштаба неоднородностей и размера волновой трубки.

Оценка ошибок, обусловленных пренебрежением указанной зависимостью, является целью этой работы. В статье получены выражения для спектра корреляционной функции интенсивности волны, прошедшей турбулентный слой с регулярной рефракцией в первом приближении метода плавных возмущений (МПВ). Сделаны оценки ошибок приближения ФЭ, обусловленных рефракцией в атмосфере Земли на высотах 25 + 75 км.

### Спектры мерцаний в первом приближении МПВ

Рассмотрим распространение электромагнитного излучения удаленного источника сквозь турбулентный слой с регулярной рефракцией. Будем считать, что источник расположен достаточно дале-

ко от слоя  $r_S \gg \Delta^2/\lambda$ , где  $r_S$  – расстояние между источником и слоем;  $\Delta$  – поперечный размер слоя;  $\lambda$  – длина волны, так что падающую на внешнюю границу исследуемого слоя волну с гармонической временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$  и волновым числом  $k_0 = 2\pi/\lambda$  можно считать плоской. Показатель преломления в слое  $n_t(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r})$  представляет собой суперпозицию регулярной  $n(\mathbf{r})$  и случайной  $\delta n(\mathbf{r})$  составляющих, зависящих от радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  текущей точки. Будем считать, что пространственный масштаб изменения регулярной составляющей  $H$  достаточно велик, чтобы выполнялось соотношение  $L_0 \ll H^2/\lambda$ , где  $L_0$  – расстояние между приемником и искажающим слоем. Это позволяет описывать поле в точке наблюдения  $\mathbf{R}_0$  в отсутствие флуктуаций показателя преломления  $\delta n(\mathbf{r}) \equiv 0$  в приближении геометрической оптики (ГО). Случайное поле неоднородностей показателя преломления будем характеризовать корреляционной функцией

$$B_n(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \delta n(\mathbf{r}_1) \delta n(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (1)$$

в предположении, что ее зависимость от переменной  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  значительно слабее, чем от разности координат  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , а при  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > H$  она исчезающе мала. Кроме того, будем полагать, что дисперсия флуктуаций поля в точке наблюдения невелика.

Учет нелокальности искажающего слоя проведем в рамках первого приближения метода плавных возмущений. Без учета обратного рассеяния компоненты электрического поля в точке  $\mathbf{r}$  могут быть представлены в виде [6]:

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r})e^{\psi_{10}(\mathbf{r})};$$

$$\psi_{10}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{U_0(\mathbf{r}')}{U_0(\mathbf{r})} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где  $U_0(\mathbf{r})$  и  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – электрическое поле и функция Грина точечного источника в безграничной среде при отсутствии флуктуаций показателя преломления. В приближении ГО представим их следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} U_0(\mathbf{r}) \\ G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0(\mathbf{r})e^{i\Psi(\mathbf{r})} \\ A_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')e^{i\Psi_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\begin{Bmatrix} A_0(\mathbf{r}) \\ A_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{Bmatrix}$  – медленно меняющиеся амплитудные множители;  $\begin{Bmatrix} \Psi(\mathbf{r}) \\ \Psi_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{Bmatrix}$  – эйконалы. Рассуждения, аналогичные приведенным в [6] для случая макроскопически изотропной и однородной среды, позволяют при разложении подынтегрального выражения в (2) в ряд Тейлора по поперечным к лучу координатам ограничиться членами нулевого порядка для амплитуд и второго порядка для фазовых набегов. Подстановка разложений в (2) дает

$$\begin{aligned} \Psi_{10}(\mathbf{R}_0) &= \int_{\Sigma} dl A_G(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \frac{A_0(\mathbf{r}_0)}{A_0(\mathbf{R}_0)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta n(\mathbf{r}') e^{i(z(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \cdot \overline{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0))} dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

В этой формуле внешний интеграл берется по траектории  $\Sigma$  луча, проходящего через точку  $\mathbf{R}_0$ ;  $\mathbf{r}_0$ ,  $x$ ,  $y$  есть проекция текущей точки  $\mathbf{r}'$  на траекторию и ее поперечные смещения. Диадик  $\overline{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  характеризует дополнительный набег фазы луча, пришедшего в точку наблюдения  $\mathbf{r}$  после рассеяния неоднородностью в точке  $\mathbf{r}'$ , по отношению к лучу, пришедшему в точку  $\mathbf{r}$  по траектории  $\Sigma$ . Здесь и далее знаками  $\cdot$ ,  $\times$ ,  $:$  обозначены скалярное, векторное и двойное скалярное произведения; если знак операции между векторами опущен, подразумевается диадное произведение.

При вычислении корреляционной функции

$$B_I(\mathbf{R}_0, \delta\mathbf{r}) = \left\langle \frac{\delta I(\mathbf{R}_0 + \delta\mathbf{r}/2) \delta I(\mathbf{R}_0 - \delta\mathbf{r}/2)}{\langle I(\mathbf{R}_0 + \delta\mathbf{r}/2) \rangle \langle I(\mathbf{R}_0 - \delta\mathbf{r}/2) \rangle} \right\rangle \quad (5)$$

флуктуаций интенсивности  $\delta I(\mathbf{r}) \approx 2\text{Re}\Psi_{10}(\mathbf{r})$  будем пренебрегать изменениями амплитуд  $A_{0,G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  и компонент  $\overline{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  на размерах неоднородностей. Удобно перейти от корреляционных функций к их Фурье-трансформантам по быстрым переменным, т.е. к трехмерному спектру

$$\tilde{B}_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\mathbf{r}_0, \delta\mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{k}\delta\mathbf{r}_0} d\delta\mathbf{r}_0$$

и двумерному спектру

$$\tilde{B}_I(\mathbf{R}_0, \mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_I(\mathbf{R}_0, \delta\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\delta\mathbf{r}} d\mathbf{p}$$

(слабой зависимостью от составляющей  $\delta\mathbf{r}$ , параллельной лучу в точке приема, пренебрегаем). Вычисляя интегралы по поперечным к лучу направлениям в прямом и обратном пространствах, получим следующую связь между спектрами:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_I(\mathbf{R}_0, \mathbf{k}) &= 16\pi^3 k_0^2 A_0^2(\mathbf{R}_0) \times \\ &\times \int_{\Sigma} dl \frac{A_0^2(\mathbf{r}_0) A_G^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)}{\det F(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \det \mu(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)} \tilde{B}_n \left( \mathbf{r}_0, \mathbf{k} \cdot \overline{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \right) \times \\ &\times \sin^2 \left\{ \left| \mathbf{k} \cdot \overline{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \cdot \overline{F}^{-1/2}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \right|^2 / 4k_0 \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\overline{\mu}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  – матрица аффинного преобразования сечения волновой трубки при переходе от точки  $\mathbf{r}_0$  к точке  $\mathbf{R}_0$ .

## Ошибки приближения ФЭ

Приближению ФЭ соответствуют пренебрежение зависимостью от координат текущей точки  $\mathbf{r}_0$  в амплитудных функциях  $A_0(\mathbf{r}_0)$ ,  $A_G(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  и диадиках  $\overline{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$ ,  $\overline{\mu}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  и замена их на соответствующие значения в точке  $\mathbf{r}_{0\text{ФЭ}}$  пересечения луча  $L$  и фазового экрана. Можно выделить три вида возникающих при этом ошибок.

*Во-первых*, это ошибка, вызванная изменением амплитудного множителя

$$A_{eff}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) = \frac{A_0^2(\mathbf{r}_0) A_G^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)}{\det F(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0) \det \mu(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)}$$

в подынтегральном выражении. Следует отметить, что множитель  $\det \overline{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  компенсирует особенность функции Грина, так что амплитудный множитель не меняется при приближении приемника к слою сравнительно медленно и не имеет особых точек. Относительная величина погрешности не превосходит

$$\varepsilon_1 = \frac{A_{eff}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0f}) - A_{eff}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0c})}{A_{eff}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0\text{ФЭ}})}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{r}_{0f}$ ,  $\mathbf{r}_{0c}$  – наиболее и наименее удаленные от приемника точки слоя, лежащие на луче  $\Sigma$ . Она не зависит от пространственной частоты  $\mathbf{k}$ , а условие  $\varepsilon_1 \ll 1$  соответствует приближению оптически тонкого слоя.

*Во-вторых*, ошибка может быть связана с изменением сечения волновой трубки в искажающем слое и, как следствие, с изменением соотношения размеров трубки и пространственного масштаба неоднородностей. Это приводит к размыванию спектра и ошибке

$$\varepsilon_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \tilde{B}_n(\mathbf{r}_{0\Phi\Theta}, \mathbf{q}) \big|_{\mathbf{q}=\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0\Phi\Theta})}}{\tilde{B}_n(\mathbf{r}_{0\Phi\Theta}, \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0\Phi\Theta}))} \mathbf{k} : \left[ \boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0f}) - \boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0c}) \right], \quad (8)$$

которая увеличивается прямо пропорционально  $|\mathbf{k}|$ . Основным фактором при оценке этой ошибки является то, насколько сильно зависит спектр неоднородностей показателя преломления от пространственной частоты.

*В-третьих*, рефракция в слое приводит к увеличению угла рассеяния на неоднородностях, находящихся в удаленной от приемника части слоя, и, следовательно, френелевского масштаба. Это ограничивает область пространственных частот, внутри которой применимо приближение ФЭ, следующим неравенством:

$$\left| \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0f}) \cdot \overline{F}^{-1/2}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0f}) \right|^2 - \left| \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0c}) \cdot \overline{F}^{-1/2}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_{0c}) \right|^2 < \pi k_0. \quad (9)$$

При более высоких пространственных частотах максимумы и минимумы дифракционных картин от неоднородностей одинакового размера, находящихся на луче  $\Sigma$  в разных частях слоя, будут накладываться друг на друга. Особенность диагональных компонент диадика  $\overline{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0)$  при  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0$  ведет к быстрому ухудшению точности приближения ФЭ при уменьшении расстояния между приемником и слоем, аналогично мерцаниям в отсутствие рефракции.

Таким образом, выполнения условия оптически тонкого слоя недостаточно для использования приближения ФЭ. Должны выполняться, по крайней мере, еще два условия, ограничивающие исследуемую область спектра и структуру неоднородностей показателя преломления.

### Приближение ФЭ при затменном наблюдении мерцаний

Оценим правомерность применения приближения ФЭ к задаче исследования спектров мерцаний звезд при затмении их атмосферой Земли. Геометрия затменного наблюдения представлена на рис. 1.

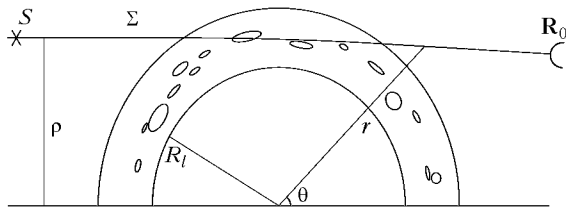


Рис. 1. Геометрия задачи

Для описания распространения электромагнитного поля будем использовать сферическую систему ко-

ординат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре Земли, причем луч  $\theta = \pi$  соответствует направлению на источник. Регулярная часть показателя преломления  $n(r) = 1 + N(r)$ , которая предполагается не зависящей от угловых координат, приводит к искривлению луча, а случайная  $\delta n(\mathbf{r})$  — к развитию флуктуаций электромагнитного поля волны. Зависимость регулярной составляющей от длины волны  $\lambda_0$  и средних температуры  $\langle T(\mathbf{r}) \rangle$  (К) и давления  $\langle P(\mathbf{r}) \rangle$  (мбар) описывается известным соотношением [7]:

$$N(r) = 7,76 \cdot 10^{-6} \frac{\langle P(\mathbf{r}) \rangle}{\langle T(\mathbf{r}) \rangle} \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\lambda_0^2} \right), \quad (10)$$

где параметр  $\Lambda = 87$  мкм характеризует дисперсию атмосферы в диапазоне длин волн  $\lambda_0 \in 0,3 \div 20$  мкм. Отношение средних давления и температуры убывает с высотой по закону, близкому к экспоненциальному, с пространственным масштабом  $H$ , лежащим в интервале  $6 \cdot 10^3 \div 8 \cdot 10^3$  м, что позволяет аппроксимировать радиальную зависимость регулярной составляющей следующим соотношением:

$$N(r) = N_0 \exp[(r - R_l)/H], \quad (11)$$

где  $R_l \approx 6,4 \cdot 10^6$  м — высота нижней границы исследуемого слоя атмосферы;  $N_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$  — значение индекса рефракции на этой границе. Видно, что для волн оптического диапазона выполнено условие  $L_0 \ll H^2/\lambda$ , если расстояние между слоем и приемником  $L_0$  не превосходит нескольких тысяч километров. Это позволяет воспользоваться геометрикооптическим описанием для компонент регулярной составляющей поля. Луч  $\Sigma$  лежит в плоскости  $\varphi = \text{const}$  и определяется соотношением

$$\theta(r, \rho) = \theta_p(\rho) \pm \Delta\theta(r, \rho),$$

$$\Delta\theta(r, \rho) = \int_{h_p(\rho)}^r \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r)r^2/\rho^2 - 1}}, \quad (12)$$

где  $\rho$  — прицельный параметр (расстояние между лучом и осью  $\theta = \pi$  до входа в атмосферу), высота точки перигея  $h_p(\rho)$  есть решение уравнения  $n(h_p)h_p = \rho$ , а ее угловая координата задается следующим образом:

$$\theta_p(\rho) = \pi - \int_{h_p(\rho)}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r)r^2/\rho^2 - 1}}. \quad (13)$$

Пусть приемное устройство расположено в точке  $\mathbf{R}_0 = (R_0, \Theta, 0)$ . Тогда прицельный параметр луча, попадающего в точку приема, может быть найден из уравнения  $\Theta = \theta(R_0, \rho)$ . Будем считать, что апертура достаточно мала как по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций интенсивности излучения, так и с пространственным масштабом изменения амплитуды регулярной составляющей, и будем пренебрегать ее интегрирующим эффектом.

Для определения функций, входящих в (6), воспользуемся результатами [8], справедливыми для сферически симметричного искажающего слоя:

$$A_{eff}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \left| \frac{8\pi k_0^2 \theta_r(r, \rho) \theta_p(R_0, \rho) \sin^2 \Theta}{n(r)n(R_0)\theta_p(r, \rho)\theta_r(R_0, \rho)\sin^2 \theta(r, \rho)\cos[\theta(r, \rho) - \Theta]} \right|, \quad (14)$$

$$\mu_{\perp}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \frac{n(R_0)R_0 \theta_r(R_0, \rho)\theta_p(r, \rho)}{n(r)r \theta_r(r, \rho)\theta_p(R_0, \rho)},$$

$$\mu_{\parallel}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \frac{r \sin \theta(r, \rho)}{R_0 \sin \Theta}, \quad (15)$$

$$\gamma_{\perp}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = 2k_0 \frac{n^2(R_0)R_0^2 \theta_r^2(R_0, \rho)\theta_p(r, \rho)}{\rho^2 \theta_p(R_0, \rho)[\theta_p(r, \rho) - \theta_p(R_0, \rho)]},$$

$$\gamma_{\parallel}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) = \frac{2k_0 \rho \sin^2 \theta(r, \rho)}{R_0^2 \sin^2 \Theta \operatorname{tg}(\theta(r, \rho) - \Theta)}, \quad (16)$$

причем

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) &= \mu_{\perp}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \frac{\mathbf{e}_{\phi} \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)}{|\mathbf{k}(\mathbf{R}_0)|} \frac{\mathbf{e}_{\phi} \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)}{|\mathbf{k}(\mathbf{R}_0)|} + \\ &+ \mu_{\parallel}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} & \stackrel{=-1}{\mu}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \cdot \stackrel{=-1/2}{F}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) / 4k_0 = \\ & = \gamma_{\perp}^{-1/2}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \frac{\mathbf{e}_{\phi} \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)}{|\mathbf{k}(\mathbf{R}_0)|} \frac{\mathbf{e}_{\phi} \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)}{|\mathbf{k}(\mathbf{R}_0)|} + \gamma_{\parallel}^{-1/2}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) \mathbf{e}_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}. \end{aligned}$$

Нижние индексы у функции  $\theta(r, \rho)$  обозначают операцию дифференцирования по соответствующей переменной.

Использование громоздких формул (14)–(16) имеет смысл лишь в том случае, когда более простые выражения, полученные в [4, 5] в рамках метода фазового экрана, дают значительную ошибку. Поэтому представляется важным установить область применимости допущений, положенных в основу этого метода, а именно:

1) Траектория  $\Sigma$  может считаться прямолинейной в интервале высот  $r \in [h_p, h_p + 2H]$ , который дает основной вклад в формирование флуктуаций интенсивности.

2) Расчет корреляционной функции неоднородностей плотности воздуха может быть произведен по формулам для декартовой системы координат.

3) Приближение ФЭ применимо для описания мерцаний.

Радиус кривизны траектории  $\Sigma$  принимает минимальное значение  $R_c \cong H/N(h_p) \geq 3 \cdot 10^8$  м в точке перигея, что на два порядка превосходит высоту  $R_l$ . Пренебрежение искривлением траектории приводит к ошибке в определении высоты текущей

точки на величину порядка  $3HR_l/R_c \cong 300$  м. На таких масштабах относительные изменения амплитудного множителя (14), равно как и функций (15), (16), не превосходят 1–2%, что заметно меньше их относительного изменения вдоль луча (~10 ÷ 15%). Поэтому можно пренебрегать искривлением, пользуясь для описания участка луча внутри исследуемого слоя атмосферы следующими приближенными равенствами:

$$\theta(r, \rho) \approx \theta_p(\rho) \pm \arccos \frac{h_p(\rho)}{r}, \quad (17)$$

$$\theta_r(r, \rho) \approx \pm \frac{h_p(\rho)}{r \sqrt{r^2 - h_p^2(\rho)}}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \theta_p(r, \rho) &\approx \frac{d}{d\rho} \theta_p(\rho) \mp \\ &\mp \frac{Hr}{[H\rho - h_p(\rho)\rho + h_p^2(\rho)] \sqrt{r^2 - h_p^2(\rho)}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где верхний знак соответствует лучу, прошедшему точку перигея, в противном случае выбирается нижний знак.

В то же время игнорирование изменения направления волнового вектора в аргументе спектра  $\tilde{B}_n(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  может, в принципе, привести к значительным неточностям в случае сильной анизотропии корреляционной функции неоднородностей показателя преломления. Учитывая, что угол между лучом и радиусом-вектором текущей точки составляет  $\alpha = \arcsin \frac{\rho}{n(r)r}$ , следует представлять второй аргумент спектра  $\tilde{B}_n(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{q_{\parallel}}{\mu_{\parallel}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} \mathbf{e}_{\phi} - \frac{q_{\perp} \rho}{\mu_{\perp}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) n(r) r} \mathbf{e}_r \mp \\ &\mp \frac{q_{\perp}}{\mu_{\perp}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{n^2(r)r^2}} \mathbf{e}_{\theta}, \end{aligned} \quad (20)$$

где выбор знака проводится так же, как и в формулах (17)–(19).

В работах [2, 3] показано, что крупномасштабные неоднородности показателя преломления на высотах 25–75 км сплюснуты в радиальном направлении, в то время как мелкомасштабная составляющая изотропна. Спектр неоднородностей представляет собой суперпозицию функций вида

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n(\mathbf{R}, \delta \mathbf{r}) &= F(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \\ \mathbf{K} &= \sqrt{\delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} : \{\mathbf{e}_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + \mathbf{e}_{\phi} \mathbf{e}_{\phi} + \eta^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r\}} \end{aligned} \quad (21)$$

с различными значениями параметра анизотропии  $\eta$ . Для изотропной компоненты он равен единице, крупномасштабная составляющая характеризуется значениями  $\eta > 30$ .

В случае пренебрежения искривлением луча отклонение эллипсоида, на котором функция вида (21) принимает одинаковые значения, от сферы, радиус  $h$  которой равен большой полуоси эллипсоида, на краях исследуемого слоя составит  $h\left\{1 - \left(1/\sqrt{1 + \eta^2 \varepsilon^2}\right)\right\}$ , где  $\varepsilon = 2\sqrt{Hh_p(\rho)}/R_c$  — угол поворота луча в слое относительно прямолинейного. Полагая  $h = l_0$ , где  $l_0$  — характерный пространственный масштаб флуктуаций в плоскости  $(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ , получим оценку для верхней границы параметра анизотропии:

$$\eta_{\max} = R_c / \sqrt{Hh_p(\rho)} \sim 10^3.$$

Пренебрежение искривлением луча возможно, если параметр анизотропии атмосферных неоднородностей не превосходит  $\eta_{\max}$ .

Также следует оценить величину возможных искажений, связанных с пренебрежением изменения ортов сферической системы координат в пределах пространственного масштаба неоднородностей. Полагая, что при смещении текущей точки на расстоянии, не превосходящие  $l_0$ , ошибка в определении параметра  $K$  не должна превосходить  $l_0$ , найдем верхнюю границу для параметра анизотропии в виде  $\eta_{\max} = R_0/l_0 \sim 10^4$ . Искажения будут существенны при  $\eta > \eta_{\max}$ .

Анализ искажений, связанных с приближением ФЭ, удобно провести, предполагая спектр флуктуаций показателя преломления изотропной дельта-функцией  $\tilde{B}_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}) = \delta(|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0|)$ . Приближение ФЭ сохраняет особенность в виде одномерной дельта-функции, но преобразует область, в которой она отлична от нуля, в эллипс:

$$S_{\text{ФЭ}} = \left\{ \frac{q_\perp^2}{\mu_{\perp\text{ФЭ}}^2} + \frac{q_\parallel^2}{\mu_{\parallel\text{ФЭ}}^2} = q_0^2 \right\}, \quad (22)$$

тогда как учет протяженности искажающего слоя уничтожает особенность, распределяя ее по области

$$S_{\text{МПВ}} = \left\{ \bigcup_{\mathbf{r} \in \Sigma} \frac{q_\perp^2}{\mu_\perp^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} + \frac{q_\parallel^2}{\mu_\parallel^2(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} = q_0^2 \right\}, \quad (23)$$

где  $\Sigma$  — участок луча, лежащий внутри слоя. Таким образом, рефракция приводит к размытию спектра с характерным масштабом в обратном пространстве, пропорциональным пространственной частоте  $q_0$ .

$$q_{\parallel\max} = \frac{1}{R_0 \sin \Theta} \sqrt{2\pi k_0 \rho \left[ \frac{\text{ctg}[\theta_p(\rho) + \Delta\theta(r_{\max}, \rho) - \Theta]}{\sin^2[\theta_p(\rho) + \Delta\theta(r_{\max}, \rho)]} - \frac{\text{ctg}[\theta_p(\rho) - \Delta\theta(r_{\max}, \rho) - \Theta]}{\sin^2[\theta_p(\rho) - \Delta\theta(r_{\max}, \rho)]} \right]}, \quad (26)$$

$$q_{\perp\max} = \frac{R_0}{\rho} \left| \frac{\theta_r(R_0, \rho)}{\theta_p(R_0, \rho)} \right| \sqrt{\frac{\pi k_0}{2} \frac{(\partial\theta_p(\rho)/\partial\rho)^2 - \Delta\theta_p^2(R_0, \rho)}{\Delta\theta_p(r_{\max}, \rho)}}. \quad (27)$$

Его относительная величина различна для продольного  $\mathbf{e}_\parallel$  и поперечного  $\mathbf{e}_\perp \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)$  направлений:

$$\delta_\parallel = 1 - \frac{\sin[\theta_p(\rho) + \Delta\theta(r_{\max}, \rho)]}{\sin\theta_p(\rho)},$$

$$\delta_\perp = 2 \left| \frac{\Delta\theta_p(r_{\max}, \rho)}{\partial\theta_p(\rho)/\partial\rho} \right| \left/ \left( 1 + \left| \frac{\Delta\theta_p(r_{\max}, \rho)}{\partial\theta_p(\rho)/\partial\rho} \right| \right) \right., \quad (24)$$

где  $r_{\max} = h_p(\rho) + 3H$  — высота верхней границы слоя. Оценка этих величин для высоты 30 км точки перигея над поверхностью Земли дает  $\delta \sim 1\%$ ,  $\delta_\perp \sim 10\%$ .

Предположение о неизменности амплитудного множителя (14) на пути интегрирования дает относительную ошибку порядка  $l/L_0$ , где  $l$  — расстояние между точкой траектории  $\Sigma$  на границе области, активно влияющей на формирование поля флуктуаций ( $r = h_p + 2H$ ), и точкой перигея. Ошибка не превосходит 10–20% при интерпретации результатов наблюдений с борта космической станции при  $L_0 > 1000$  км (рис. 2).

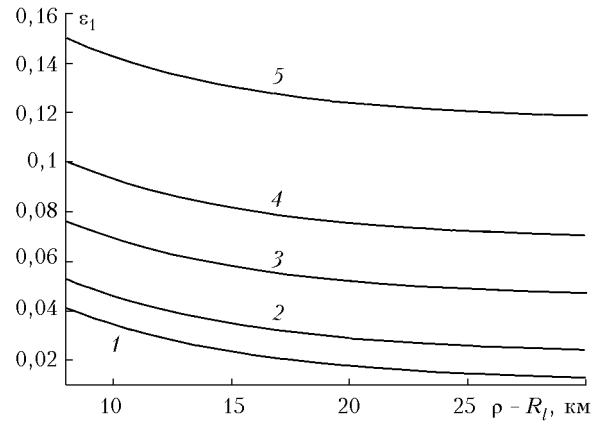


Рис. 2. Относительная ошибка амплитудного множителя.  $\lambda = 0,7$  мкм. 1 —  $L_0 = 500$ , 2 — 1000, 3 — 2000, 4 — 3000, 5 — 5000 км

Особый интерес представляет поведение функций (16). Условие (9) преобразуется в формулу

$$\frac{q_\perp^2}{\gamma_\perp(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} + \frac{q_\parallel^2}{\gamma_\parallel(\mathbf{R}_0, \mathbf{r})} - \frac{q_\perp^2}{\gamma_\perp(\mathbf{R}_0, \mathbf{h}_p)} - \frac{q_\parallel^2}{\gamma_\parallel(\mathbf{R}_0, \mathbf{h}_p)} \leq \pi, \quad (25)$$

из которой найдем оценки для граничных значений пространственных частот  $q_\parallel, q_\perp$ :

Величины  $q_{\perp, \max}$  представляют собой верхние границы области пространственных частот, в которой изменением радиуса первой зоны Френеля внутри слоя можно пренебречь. По мере удаления приемника от слоя поведение границ  $q_{\perp, \max}$  противоположно. При удалении приемника от слоя величина  $q_{\max}$  быстро растет и обращается в бесконечность на каустике  $\Theta = 0$ . Для расстояний  $L_0 \sim 1000$  км, характерных для наблюдения с борта космической станции,  $q_{\max} \sim 200 \text{ м}^{-1}$ . Граница  $q_{\perp, \max}$ , наоборот, медленно убывает при удалении от слоя. Она составляет  $\sim 7 \text{ м}^{-1}$  на расстоянии 1000 км от слоя (рис. 3). Наличие верхней границы связано с тем, что угол рассеяния на неоднородностях, находящихся до точки перигея, изменяется под влиянием регулярной рефракции и относительное изменение возрастает с уменьшением размера неоднородности.

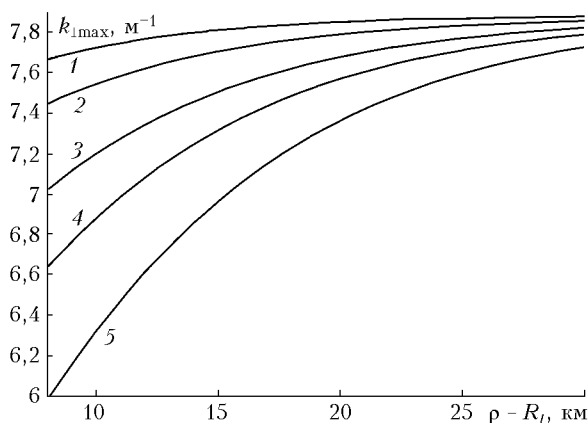


Рис. 3. Верхняя граница области применимости приближения ФЭ для поперечной пространственной частоты.  $\lambda = 0,7$  мкм. 1 –  $L_0 = 500$ , 2 – 1000, 3 – 2000, 4 – 3000, 5 – 5000 км

После прохождения атмосферы лучи, рассеянные одинаковыми неоднородностями, находящимися в разных частях слоя, расходятся под разными углами, что обуславливает появление ошибок при удалении приемника от слоя. Следует отметить, что этот эффект имеет существенное значение для пространственных частот, превосходящих френелевский масштаб, причем относительная величина различия верхней границы области применимости ФЭ и френелевского масштаба обратно пропорциональна изменению поперечного сечения волновой трубки внутри слоя. Поведение границ  $q_{\perp, \max}$  при удалении приемника определяется, прежде всего, характером трансформации волновой трубки за счет рефракции. Сжатие спектра в направлении  $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{k}(\mathbf{R}_0)$  определяет и уменьшение  $q_{\perp, \max}$ , так же как растяжение спектра вдоль  $\mathbf{e}_\phi$  влечет рост  $q_{\max}$ .

### Заклучение

В работе рассмотрены причины уменьшения точности приближения ФЭ при анализе флуктуа-

ций интенсивности электромагнитной волны, прошедшей турбулентный слой среды с изменяющимся в пространстве средним значением показателя преломления. Установлено, что наибольшее значение имеют следующие факторы.

1. Зависимость амплитуды вторичных волн от расположения их источника.
2. Изменение амплитуды первичной волны по слою за счет рефракции.
3. Изменение сечения волновой трубки внутри слоя.
4. Изменение угла рассеяния на неоднородностях за счет рефракции.

Их влияние на характеристики прошедшей волны весьма разнообразно. Учет первого и второго факторов влечет за собой появление ошибки, относительная величина которой не зависит ни от пространственной частоты, ни от вида спектра неоднородностей показателя преломления. При удалении точки наблюдения от искажающего слоя полного ее исчезновения, что справедливо для слоев без рефракции, не происходит. Следствием третьего фактора является размытие спектра неоднородностей показателя преломления, масштаб которого прямо пропорционален пространственной частоте. Значимость этого эффекта определяется, прежде всего, тем, насколько резко зависит спектр неоднородностей показателя преломления от пространственной частоты. Влияние четвертого фактора состоит в размывании осцилляций в спектре флуктуаций интенсивности на пространственных частотах, превышающих френелевский масштаб. Полученные в работе оценки ошибок приближения ФЭ для задач анализа спектров мерцаний звезд при затмении их атмосферой Земли показывают, что использование существенно более громоздких формул МПВ в рамках указанных задач нецелесообразно.

Автор выражает признательность А.С. Гурвичу (ИФА РАН, г. Москва) за инициирование исследований автора в этом направлении, обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Работа поддержана грантом РФФИ № 02-05-64310.

1. Grechko G.M., Gurvich A.S., Kan V., Savchenko S.A., Sokolovskii S.V. Scintillations and random refraction during occultations by terrestrial atmosphere // J. Opt. Soc. Amer. A. 1985. V. 2. N 12. P. 2120–2123.
2. Гурвич А.С., Захаров И., Кан В., Лебедев В.В., Нестеренко А.И., Неужил Л., Пахомов А.И., Савченко С.А. Мерцания звезд по наблюдениям с орбитальной станции «Салют-7» // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1985. Т. 21. № 12. С. 1235–1241.
3. Гречко Г.М., Гурвич А.С., Кан В., Пахомов А.И., Подвязный Я.П., Савченко С.А. Наблюдения турбулентности в атмосфере на высотах 20–70 км // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 5. С. 683–686.
4. Gurvich A.S., Brekhovskikh V.L. Study of the turbulence and inner waves in the stratosphere based on the observations of stellar scintillations from space: a model

- of scintillation spectra // *Waves Random Media*. 2001. V. 11. № 3. P. 163–181.
5. *Гурвич А.С.* Флуктуации при наблюдении внеземных источников из космоса через атмосферу Земли // *Изв. вузов. Радиофиз.* 1984. Т. XXVII. № 8. С. 951–959.
6. *Исмаири А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир. 1981. 319 с.
7. *Аксенов В.П., Банах В.А., Валуев В.В., Зуев В.Е., Морозов В.В., Смалихо И.Н., Цвык Р.Ш.* Мощные лазерные пучки в случайно-неоднородной атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998. 341 с.
8. *Маракасов Д. А.* Спектры мерцаний звезд при их открытии атмосферой Земли в первом приближении метода плавных возмущений // *Оптика атмосфер. и океана*. 2003. Т. 16. № 1. С. 37–41.

***D.A. Marakasov. On application of the method of phase screen to analysis of stellar scintillations caused by refractive index fluctuations in the stratospheric layer.***

Stellar scintillations during the occultation by the Earth's atmosphere are analyzed. Factors determining the accuracy of the method of phase screen as applied to description of a wave transmitted by a distorting layer in case of the spatial dependence of the regular component of refractive index are determined. The corresponding errors are estimated and a possible way of compensating for them is proposed.