

В.П. Будак, С.В. Коркин

Моделирование пространственного распределения степени поляризации рассеянного атмосферой излучения на основании полного аналитического решения векторного уравнения переноса

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 6.07.2007 г.

Рассматривается эффективный метод аналитического расчета поляризационных характеристик излучения, многократно рассеянного в толще мутной среды. Эффективность рассматриваемого метода заключается в разделении полного решения векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) на гладкую и анизотропную части. Анизотропная часть, содержащая все особенности решения, определяется в векторной малоугловой модификации метода сферических гармоник (ВМСГ). Гладкая добавка, дополняющая ВМСГ до полного решения ВУПИ, ищется матричным методом дискретных ординат. Процесс переноса поляризованного излучения рассматривается в плоскопараллельном горизонтально бесконечном слое произвольной оптической толщи, облучаемой плоским мононаправленным источником излучения. Расчетные примеры даются для облучения слоя естественным неполяризованным излучением. Однако предлагаемый метод сохраняет свои преимущества для произвольной (в том числе трехмерной) геометрии рассеивающей среды, произвольных формы источника и состояния поляризации его излучения.

Введение

Известно, что состояние поляризации излучения, описываемое естественным с фотометрической точки зрения четырехкомпонентным вектор-параметром Стокса (ВПС), содержит всю информацию об объекте зондирования, доступную оптическим методам исследования [1, 2]. Тем не менее сегодня объем исследований в скалярном приближении, т.е. с учетом только яркости излучения (первой компоненты ВПС), существенно превышает поляриметрические. Это связано со сравнительно небольшим количеством функционирующих сегодня поляриметров, что, в свою очередь, объясняется двумя главными причинами. Первая — конструктивные проблемы при создании поляриметров, необходимых для детектирования подчас довольно слабых поляризационных компонент ВПС. Однако современный уровень развития технологий позволяет решить конструктивные проблемы. Именно поэтому определяющей является вторая причина — отсутствие надежной математической модели, учитывающей поляризационные эффекты, способной служить надежной базой для интерпретации поляризационных измерений (подтверждение этому можно найти, например, в сборнике SPIE, V. 5888, «Polarization Science and Remote Sensing II», 2005, где приведен широкий спектр экспериментальных исследований на фоне небольшого количества теоретических работ).

Как и в скалярном случае, векторная (поляризационная) модель переноса излучения должна быть довольно эффективной — с высокой скоро-

стью сходимости решения краевой задачи векторного уравнения переноса излучения (КЗ ВУПИ) к точному, и давать возможность проводить расчет для сильно анизотропных индикатрис, характерных для многих природных образований (облака, океан, космическая пыль), для различных оптических толщ τ (десятичные доли для чистой атмосферы, единицы и десятки для облаков и мелководья и полубесконечной среды — океана), а также для произвольного зенитного угла облучения слоя θ_0 . Обязательным является учет многих кратностей рассеяния. Аналитическая форма решения позволит оптимизировать расчет и несколько упростит решение обратных задач. Произвольное состояние поляризации источника излучения расширит область применения модели и сделает ее пригодной для работы как с пассивными поляриметрами, так и с лидарами.

В настоящей статье предлагается модель переноса поляризованного излучения в плоскопараллельном слое мутной (рассеивающей и поглощающей) среды, облучаемой в произвольном направлении \hat{I}_0 плоским мононаправленным (ПМ) источником. Критериями для построения модели служили вышеуказанные требования.

Определение анизотропной части

Примем следующие обозначения: « \rightarrow » — четырехэлементный вектор-столбец; « \leftrightarrow » — шестнадцатилемментная матрица Мюллера; Λ — вероятность выживания фотона в одном акте рассеяния (альбеда

однократного рассеяния); θ и φ — соответственно зенитный и азимутальный углы;

$$\mu = \cos\theta; \hat{\mathbf{I}} = [\sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin\varphi, \mu]$$

— единичное направление в пространстве. ВПС и его компоненты мы обозначим как $\bar{\mathbf{L}} = [I Q U V]^T$, где «T» — операция транспонирования; I — полная яркость пучка лучей; Q , U — энергетические компоненты, определяющие степень линейной поляризации и положение плоскости референции; V определяет степень эллиптичности.

Весь материал статьи относится к рассеянию излучения, однако предлагаемый метод не потеряет своей эффективности и в физике частиц, где причиной перехода к векторным задачам является учет спина [2], а анизотропия рассеяния обычно существенно выше атмосферной.

Одной из основных проблем в решении задач о переносе излучения, как скалярных, так и векторных, является учет особенностей краевой задачи для уравнения переноса с соответствующими условиями. Данные особенности являются следствием лучевого приближения для описания поля рассеянного средой излучения. Для ПМ-источника математическая особенность (сингулярность) обусловлена прямым нерассеянным излучением, выражаемым δ -функцией Дирака. В аналитической форме сингулярность требует бесконечного числа членов ряда разложения по базисным функциям и, следовательно, не может быть вычислена аналитически. Чандрасекар предложил рассматривать поле рассеянного излучения в виде двух составляющих — прямой нерассеянной δ -сингулярности, образующей функции источников уравнения переноса, и рассеянного света [3]. Однако для реальных сильно анизотропных мутных сред рассеянный свет описывается «острой» функцией углового распределения яркости, которая требует значительного количества членов ряда разложения для своего определения. Это неминуемо ведет к увеличению времени счета и в ряде случаев к снижению обусловленности решения.

Здесь мы будем использовать методику, хорошо зарекомендовавшую себя в скалярном приближении [4–7], и представим искомое векторное поле излучения в виде суперпозиции наиболее анизотропной части, содержащей в себе прямое излучение, и гладкой добавки (обозначим ее индексом R (regular part) — регулярная часть в противовес анизотропной части, содержащей сингулярность). Анизотропия рассеяния сосредоточена в области «малых» углов SA (small angle) рассеяния относительно падения излучения на элементарный рассеивающий объем (при этом термин «малые углы» носит исторический оттенок и не отражает реально области применения метода). С учетом сказанного запишем

$$\bar{\mathbf{L}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \bar{\mathbf{L}}_R(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \bar{\mathbf{L}}_{SA}(\tau, \hat{\mathbf{I}}). \quad (1)$$

Базисными функциями для задач переноса поляризованного излучения являются обобщенные сферические функции (ОСФ), свойства, теорема

сложения и рекуррентные соотношения для которых известны [8]:

$$\bar{\mathbf{Y}}_m^k(\mu) = \text{diag} [P_{m,+2}^k(\mu); P_{m,+0}^k(\mu); P_{m,-0}^k(\mu); P_{m,-2}^k(\mu)].$$

Запишем стандартное представление искомого пространственного распределения ВПС и матрицы рассеяния $\bar{\mathbf{x}}$ по ОСФ (для циркулярного СР (Circular Polarization)-базиса [9], используемого в векторной теории переноса для раскрытия интеграла рассеяния):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{\text{СР}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \bar{\mathbf{Y}}_m^k(\mu) \bar{\mathbf{f}}_m^k(\tau) \exp(im\varphi); \\ \left[\bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{I}}') \right]_{r,s} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_{r,s}^k(\tau) P_{r,s}^k(\hat{\mathbf{I}}'). \end{aligned} \quad (2)$$

Анизотропную часть рассчитаем в векторной малоугловой модификации метода сферических гармоник [10]. ВМСГ (совершенно аналогично МСГ [4–7] — скалярному приближению ВМСГ) строится на основе аппроксимации дискретного по зенитному индексу k (порядку ОСФ $P_{m,n}^k(\mu)$) пространственного спектра $\bar{\mathbf{f}}_k^m$ искомого векторного поля яркости непрерывной функцией. Гладкость пространственного спектра, вызванная сингулярностью решения и анизотропией рассеяния, позволяет ограничиться двумя членами разложения $\bar{\mathbf{f}}_k^m$ в ряд Тейлора по номеру гармоники k :

$$\bar{\mathbf{f}}^m(\tau, k \pm 1) \approx \bar{\mathbf{f}}^m(\tau, k) \pm \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^m(\tau, k)}{\partial k}. \quad (3)$$

Это допущение совместно с раскрытием интеграла рассеяния на основе теоремы сложения для ОСФ в комплексном циркулярном базисе, с рекуррентными соотношениями для ОСФ и представлениями (2) позволяет получить простое аналитическое выражение для расчета анизотропной части в виде матричной экспоненты

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{\text{ВМСГ}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) &= \sum_{m=-2}^{0,2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \bar{\mathbf{P}}_k^m(\hat{\mathbf{I}}_0) \times \\ &\times \exp \left[-(\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_k) \tau / \mu_0 \right] \bar{\mathbf{f}}_k^m(0) \exp(im\varphi) / 4\pi, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты разложения матрицы рассеяния в действительном энергетическом SP-базисе (Stokes Polarisation) есть $\bar{\chi}_k = \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{T}}_{\text{CS}}^{-1}$ и матричные полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{Y}}_k^m(\mu) \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}}^{-1} &= \bar{\mathbf{P}}_k^m(\mu) = \\ &= \begin{bmatrix} P_{m,0}^k(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_m^k(\mu) & -iT_m^k(\mu) & 0 \\ 0 & iT_m^k(\mu) & R_m^k(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{m,0}^k(\mu) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где известная матрица перехода от комплексного СР в энергетический (стоксовый) SP-базис обозна-

чена \bar{T}_{SC} [9], а также использованы следующие полиномы, аналогичные [11]:

$$\begin{aligned} R_m^k(\mu) &= 0,5[P_{m,2}^k(\mu) + P_{m,-2}^k(\mu)]; \\ T_m^k(\mu) &= 0,5[P_{m,2}^k(\mu) - P_{m,-2}^k(\mu)]. \end{aligned}$$

Векторы $\bar{I}_k^m(0)$ в (4) известны из граничных условий [10]. ВМСГ (4) позволяет проводить расчет практически во всю переднюю полусферу (множество направлений в полупространстве, содержащем направление падения излучения на слой). Конечно, область достоверности зависит от параметров среды. Чем выше острота тела яркости (т.е. чем сильнее анизотропия рассеяния и или чем меньше оптическая толща слоя), тем шире область, где ВМСГ дает достаточно хороший результат. Отметим, что ВМСГ (4) содержит, наряду с анизотропной частью рассеянного излучения, сингулярную особенность решения КЗ ВУПИ. В решении (4) возможно аналитически раскрыть матричную экспоненту [12, 13]. Однако современные математические пакеты, например The MathWorks Matlab[®], позволяют получать решение непосредственно по выражению (4). Расчет ВМСГ на стандартном персональном компьютере занимает порядка 1 с.

Обрывание ряда Тейлора (4) приводит к пренебрежению дисперсией путей рассеяния фотонов, что ведет к ошибочному расчету поля яркости в задней полусфере. Для устранения этого недостатка и получения полного решения КЗ ВУПИ мы далее найдем немалую добавку (регулярную) к ВМСГ.

Регулярная часть решения

Как уже упоминалось выше, мы, в отличие от метода Chandrasekara, формулируем КЗ не для рассеянного излучения, а лишь для гладкой немалой добавки. При этом ВМСГ не изменяет общий вид КЗ ВУПИ:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \bar{L}_R(\tau, \hat{I})}{\partial \tau} + \bar{L}_R(\tau, \hat{I}) = \\ = \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{4\pi} \bar{R}(\hat{I} \times \hat{I}' \rightarrow \hat{z} \times \hat{I}) \bar{x}(\hat{I}') \bar{R}(\hat{z} \times \hat{I} \rightarrow \hat{I} \times \hat{I}') \bar{L}_R(\tau, \hat{I}') d\hat{I}' + \bar{\Delta}(\tau, \hat{I}); \\ \bar{L}(0, \hat{I}) \Big|_{\mu \geq 0} = 0; \quad \bar{L}(\tau_0, \hat{I}) \Big|_{\mu \leq 0} = -\bar{L}_{ВМСГ}(\tau_0, \hat{I}). \end{cases} \quad (6)$$

Функцию источников на основе ВМСГ $\bar{\Delta}(\tau, \hat{I})$ нетрудно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\tau, \hat{I}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_{ВМСГ}(\tau, \hat{I}, \hat{I}_0) + \bar{L}_{ВМСГ}(\tau, \hat{I}, \hat{I}_0) + \\ &+ \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{4\pi} \bar{R}(\hat{I} \times \hat{I}' \rightarrow \hat{z} \times \hat{I}) \bar{x}(\hat{I}') \bar{R}(\hat{z} \times \hat{I} \rightarrow \hat{I} \times \hat{I}') \bar{L}_{ВМСГ}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}'. \end{aligned} \quad (7)$$

Как в скалярной, так и в векторной теории переноса излучения раскрытие интеграла рассеяния, наряду с учетом особенностей решения, является

одной из главных проблем. Для этой цели в векторном случае используется комплексный циркулярный SP-базис [9], диагонализующий матрицу ротатора \bar{R} и позволяющий раскрыть интеграл рассеяния. Однако использование стабилизирующего решения масштабного преобразования [14] в случае комплексных чисел невозможно. Таким образом, после раскрытия интеграла рассеяния в комплексной области мы переводим полученную систему для векторных коэффициентов $\bar{I}_k^m(\tau)$ обратно в действительное SP-представление (указанные операции проводятся как для ВМСГ, так и при решении КЗ ВУПИ для гладкой части (6) и вычисления функции источников (7)). Векторный метод дискретных ординат (ВМО) с граничными условиями в форме Марка (С. Mark) выбран для решения (6) ввиду его большей вычислительной эффективности в отличие от метода сферических гармоник. В работе [11] КЗ ВУПИ решалась методом Chandrasekara, что позволяет использовать некоторые обозначения из [11] в настоящей работе. И наконец, заметим, что при наклонном облучении плоскости референции в (4) и (6) различаются. Мы используем поворот плоскостей референции, описываемый ротатором, для их совмещения.

Рассмотрим интеграл рассеяния в (6). Для его раскрытия мы преобразуем все интегрируемые матрицы в SP-базис (матрица перехода \bar{T}_{CS}), диагонализуя ротатор. Воспользуемся представлениями (2), теоремой сложения для ОСФ и обратным матричным переходом в фотометрический базис Стокса представления (матрица перехода $\bar{T}_{CS}^{-1} = \bar{T}_{SC}$):

$$\begin{aligned} \bar{I}_S &= \bar{T}_{SC} \frac{\Lambda}{4\pi} \times \\ &\times \int_{4\pi} \bar{T}_{CS} \bar{R}(\chi) \bar{T}_{SC} \bar{T}_{CS} \bar{x}(\hat{I}') \bar{T}_{SC} \bar{T}_{CS} \bar{R}(\chi') \bar{T}_{SC} \bar{T}_{CS} \bar{L}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}' = \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{m=-k}^k \exp(im(\varphi - \varphi')) \times \\ &\times \bar{P}_m^k(\mu) \bar{y}_k \bar{P}_m^k(\mu') \bar{L}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}', \end{aligned} \quad (8)$$

где комплексные полиномы определяются в виде суммы действительной $\bar{P}_R(\mu)$ и мнимой $\bar{P}_I(\mu)$ частей (каждая из которых зависит от k и m , однако эти индексы здесь умышленно опущены) как

$$\bar{P}_m^k(\mu) = \bar{P}_R(\mu) + i \bar{P}_I(\mu).$$

Группируя, как и в скалярном случае, азимутальные гармоники симметричных порядков m и $-m$ в (8), мы после проведения указанных матричных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \bar{I}_S &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{m=0}^k (2 - \delta_{0,m}) \times \\ &\times \left[\bar{C}_m^k(\mu, \mu') \cos(m(\varphi - \varphi')) + \bar{S}_m^k(\mu, \mu') \sin(m(\varphi - \varphi')) \right] \bar{L}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}', \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{C}_m^k(\mu, \mu') &= \tilde{P}_R(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_R(\mu') - \tilde{P}_I(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_I(\mu'); \\ \tilde{S}_m^k(\mu, \mu') &= \tilde{P}_I(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_R(\mu') + \tilde{P}_R(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_I(\mu').\end{aligned}$$

В полученном выражении (9) удобно ввести функции, аналогичные [11], а именно: определенные выше полиномы $\tilde{P}_k^m(\mu)$ (5), матрицы выборки

$$\tilde{D}_1 = \text{diag}\{1, 1, 0, 0\}; \quad \tilde{D}_2 = \text{diag}\{0, 0, -1, -1\}$$

и фазовые матрицы

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1(\varphi) &= \text{diag}\{\cos\varphi, \cos\varphi, \sin\varphi, \sin\varphi\}; \\ \tilde{\Phi}_2(\varphi) &= \text{diag}\{-\sin\varphi, -\sin\varphi, \cos\varphi, \cos\varphi\},\end{aligned}$$

что приводит (9) к виду

$$\begin{aligned}\tilde{I}_S &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{m=0}^k (2 - \delta_{0,m}) \times \\ &\times [\tilde{\Phi}_1(m(\varphi - \varphi')) \tilde{A}_k^m \tilde{D}_1 + \tilde{\Phi}_2(m(\varphi - \varphi')) \tilde{A}_k^m \tilde{D}_2] \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}, \quad (10)\end{aligned}$$

где

$$\tilde{A}_k^m = \tilde{A}_k^m(\mu, \mu') = \tilde{P}_k^m(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_k^m(\mu').$$

В соответствии с видом интеграла (10) гладкую часть удобно представить двумя азимутально-зависимыми слагаемыми

$$\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [\tilde{\Phi}_1(m\varphi) \tilde{L}_1^m(\tau, \mu) + \tilde{\Phi}_2(m\varphi) \tilde{L}_2^m(\tau, \mu)]. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), раскрывая скобки и используя ортогональность функций $\tilde{\Phi}_{1,2}(\varphi)$, мы приходим к выражению для немалозначимой гладкой добавки (интеграл рассеяния в функции источников (7) имеет совершенно аналогичное выражение) вида (регулярная часть обозначена « $\tilde{\sim}$ »)

$$\begin{aligned}\tilde{I}_S &= \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \sum_{m=0}^k \left[\tilde{\Phi}_1(m\varphi) \int_{-1}^1 \tilde{A}_k^m(\mu, \mu') \tilde{L}_1^m(\tau, \mu') d\mu' + \right. \\ &\left. + \tilde{\Phi}_2(m\varphi) \int_{-1}^1 \tilde{A}_k^m(\mu, \mu') \tilde{L}_2^m(\tau, \mu') d\mu' \right], \quad (12)\end{aligned}$$

где каждое из слагаемых определяется из КЗ, аналогичной (6), ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_i^m(\tau, \mu) + \tilde{L}_i^m(\tau, \mu) = \\ = \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \int_{-1}^1 \tilde{A}_k^m(\mu, \mu') \tilde{L}_i^m(\tau, \mu') d\mu' + \Delta_i(\tau, \mu), \quad (13) \\ \tilde{L}_i^m(0, \mu) \Big|_{\mu>0} = \tilde{0}; \quad \tilde{L}_i^m(\tau_0, \mu) \Big|_{\mu<0} = -\tilde{L}_{\text{ВМСГ}}^m(\tau_0, \mu) \Big|_{\mu<0}, \end{cases}$$

если функция источников $\tilde{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ определена. Здесь необходимо отметить, что использование функций $\tilde{\Phi}_{1,2}(\varphi)$ в [11] было вызвано блочно-диагональным видом аэрозольной матрицы рассеяния. Предлагаемый метод допускает использование произвольного вида матрицы рассеяния, если только матричные коэффициенты ее разложения по ОСФ известны.

Для вычисления функции источников после приведения плоскостей референции мы используем описанные выше методы, а именно: цепочку преобразований $SP \rightarrow CP \rightarrow SP$, теорему сложения ОСФ для раскрытия интеграла рассеяния в (7) и рекуррентные соотношения для ОСФ-системы для векторных коэффициентов.

На основании теоремы сложения, формы ВМСГ (4) и с учетом перехода в энергетический базис функция источников приобретает вид

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \tilde{T}_{\text{SC}} \left[- \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(i2n\varphi) \times \right. \\ &\left. \times \tilde{Y}_k^{2n}(\nu) (\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_k) \tilde{I}_k(\tau) \tilde{f}_k^{2n}(0) - \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_{\text{ВМСГ}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) \right].\end{aligned}$$

Выражения для преобразования дифференциального члена нетрудно получить из [8], тогда функцию источников можно представить так:

$$\tilde{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \tilde{T}_{\text{SC}} \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(i2n\varphi) \tilde{Y}_k^{2n}(\nu) \tilde{F}_k^{2n}(\tau) \tilde{f}_k^{2n}(0), \quad (14)$$

где коэффициенты определяются следующим выражением ($\tilde{I}_k = \exp(-(\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_k) \tau_0 / \mu_0)$):

$$\begin{aligned}\tilde{F}_k^m(\tau) &= \frac{1}{2k+1} \left[\tilde{A}_m^{k+1} (\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_{k+1}) \tilde{I}_{k+1}(\tau) + \tilde{B}_m^k (\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_k) \tilde{I}_k(\tau) + \right. \\ &\left. + \tilde{A}_m^k (\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_{k-1}) \tilde{I}_{k-1}(\tau) \right] - (\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda \tilde{x}_k) \tilde{I}_k(\tau).\end{aligned}$$

Матрицы в (14) имеют вид [8]:

$$\begin{aligned}[\tilde{A}_m^k]_{rs} &= \frac{1}{k} \sqrt{(k^2 - m^2)(k^2 - s^2)} \delta_{rs}; \\ [\tilde{B}_m^k]_{rs} &= \frac{ms}{k(k+1)} (2k+1) \delta_{rs}; \quad r, s = +2, +0, -0, -2.\end{aligned}$$

Плоскости референции выражений (14) и (13) различаются (функция источников задана относительно плоскости $\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0$, а ВУПИ – относительно плоскости $\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{z}}$). Необходимо использовать ротатор, представив (14) как

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{z}}) \tilde{T}_{\text{SC}} \times \\ &\times \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(i2n\varphi) \tilde{Y}_k^{2n}(\nu) \tilde{F}_k^{2n}(\tau) \tilde{f}_k^{2n}(0)\end{aligned}$$

или, дописывая необходимые матрицы преобразования базиса:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) &= \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{T}}_{\text{CS}} \bar{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{l}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{z}}) \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \times \\ &\times \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(i2n\varphi) \bar{\mathbf{Y}}_k^{2n}(\nu) \bar{\mathbf{F}}_k^{2n}(\tau) \bar{\mathbf{I}}_k^{2n}(0) = \\ &= \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{R}}_{\text{CP}}(\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{l}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{z}}) \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp(i2n\varphi) \times \\ &\times \bar{\mathbf{Y}}_k^{2n}(\nu) \bar{\mathbf{F}}_k^{2n}(\tau) \bar{\mathbf{I}}_k^{2n}(0).\end{aligned}$$

На основании теоремы сложения и используя приведение матриц к действительному виду, имеем

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}_0) &= \sum_{n=-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \sum_{q=-k}^k (-1)^q \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{Y}}_k^q(\mu) \bar{\mathbf{T}}_{\text{CS}} \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \times \\ &\times \bar{\mathbf{F}}_k^{2n}(\tau) \bar{\mathbf{T}}_{\text{CS}} \bar{\mathbf{T}}_{\text{SC}} \bar{\mathbf{I}}_k^{2n}(0) \exp(iq(\varphi - \varphi_0)) P_{2n,q}^k(\mu_0).\end{aligned}$$

Окончательно функция источников имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(\tau, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \frac{2k+1}{4\pi} \bar{\mathbf{P}}_k^m(\mu) \bar{\Phi}_k(\tau) \times \\ &\times \bar{\mathbf{P}}_k^m(\mu_0) \bar{\mathbf{L}}_0 \exp(im(\varphi - \varphi_0)),\end{aligned}\quad (15)$$

где

$$\bar{\mathbf{L}}_0 = [1 \quad p \sin 2\varphi_0 \quad -p \cos 2\varphi_0 \quad q]^T$$

– ВПС падающего излучения со степенью линейной поляризации p и эллиптичностью q , а φ_0 определяет азимутальное положение плоскости рефлексии. И наконец, в SP-базисе мы имеем

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_k(\tau) &= \left\{ \frac{1}{2k+1} \left[\bar{\mathbf{A}}_{k+1} (\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_{k+1}) \bar{\mathbf{Z}}_{k+1}(\tau) \bar{\mathbf{a}}_k + \right. \right. \\ &+ 4 \frac{(2k+1)}{k(k+1)} (\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_k) \bar{\mathbf{Z}}_k(\tau) \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{A}}_k (\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_{k-1}) \bar{\mathbf{Z}}_{k-1}(\tau) \bar{\mathbf{a}}_k \left. \right] - \\ &\left. - (\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_k) \bar{\mathbf{Z}}_k(\tau) \right\}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_k = \exp(-(\bar{\mathbf{I}} - \Lambda \bar{\chi}_k) \tau_0 / \mu_0),\end{aligned}$$

где

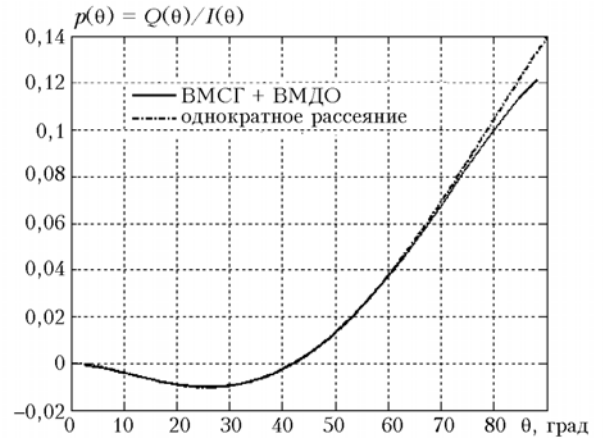
$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_k &= \text{diag}[k \quad \sqrt{k^2 - 4} \quad \sqrt{k^2 - 4} \quad k]; \\ \bar{\mathbf{A}}_k &= \bar{\mathbf{a}}_k / k; \quad \bar{\mathbf{b}} = \text{diag}[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0].\end{aligned}$$

Эти матричные коэффициенты, будучи подставленными в (15) вместе с (13), ВМСГ (4) и суперпозицией (1) (индексации «ВМСГ» и «SA» в данном случае аналогичны) дают полное решение КЗ ВУПИ для произвольных угла и стояния поляризации облучения слоя, которая в настоящей работе решена матричным методом дискретных ординат с граничными условиями в форме Марка.

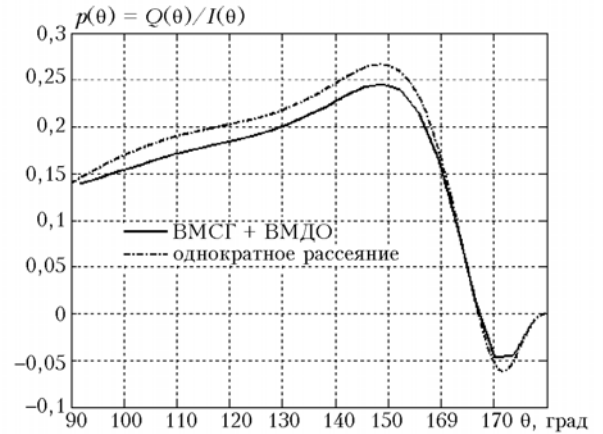
Некоторые результаты

В этом разделе мы приведем некоторые примеры расчета полного решения КЗ ВУПИ описанным

методом. Рассеяние Ми по модели Haze L [15] была использована нами для имитации аэрозольного рассеяния. Одним из эффективных путей проверки полученного решения является сравнение с приближением однократного рассеяния (рис. 1 и 2) для слаборассеивающих сред, описываемого простыми аналитическими выражениями. Рис. 1 демонстрирует сравнение двух методов при расчете степени поляризации излучения, прошедшего слой и диффузно отраженного слоем. Видно некоторое отклонение описываемого метода ВМСГ + ВМДО от приближения однократного рассеяния в меньшую сторону.



а



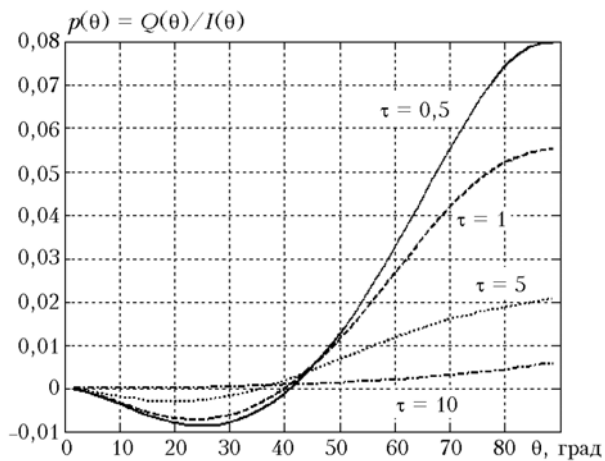
б

Рис. 1. Угловая зависимость степени поляризации $p(\theta)$ – прошедшее (а) и отраженное (б) излучение

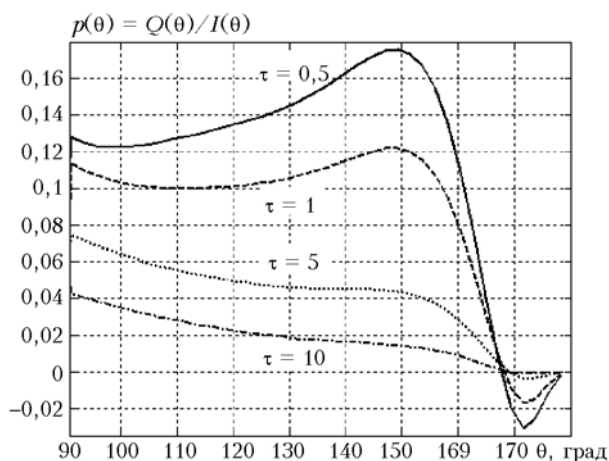
Это объясняется тем, что даже в тонких слоях на наклонных траекториях возможно возникновение более одного акта рассеяния, что ведет к деполаризации излучения. Наблюдается также известный факт полной деполаризации излучения, рассеянного вперед и назад вдоль нормали к слою. Параметры слоя: $\tau = 0,1$, $\Lambda = 0,9$.

Рис. 2 демонстрирует угловую и глубинную зависимость степени поляризации излучения, рассчитанную по предлагаемому методу. Расчеты

подтверждают известный факт деполаризации излучения с ростом толщи рассеивающего слоя. Боковые «лепестки» матрицы рассеяния M сглаживаются в результате кратных рассеяний, вследствие чего для больших толщ (в данном случае $\tau = 5, 10$) наблюдается монотонное спадание степени поляризации от угла (рис. 2, б) без экстремумов. Все представленные расчеты демонстрируют известное наличие точек нейтральной поляризации на небосводе.



а



б

Рис. 2. Угловая и глубинная зависимости степени поляризации $p(\theta)$ – прошедшее (а) и отраженное (б) излучение

Заключение

В заключении мы еще подчеркнем один важный момент: вычитание лишь δ -сингулярности с последующим определением рассеянного излучения представляется неэффективным в случаях сильноанизотропного рассеяния и наличия математических особенностей в КЗ ВУПИ, описываемых лучевым приближением. Эффективным путем решения КЗ теории переноса является нахождение решения в виде суперпозиции всей анизотропной части и гладкой добавки, причем эффективность предлагаемого метода быстро возрастает по мере

увеличения анизотропии рассеяния, увеличения стратификации рассеивающей среды, а также при переходе к трехмерной геометрии.

Полученное на основании упрощения ВУПИ решение в форме ВМСГ представляет собой инструмент, во многих случаях достаточный для решения задач зондирования по нисходящей радиации (по излучению, рассеянному в переднюю полусферу). Сравнительная простота расчета анизотропной части, предъявляющей наиболее жесткие требования к количеству используемых гармоник, в ВМСГ совместно с гладкостью добавки обуславливают эффективность описанного метода.

Отметим также еще одну особенность задач переноса поляризованного излучения. В настоящей статье интеграл рассеяния традиционно раскрывался в СР-базисе с дальнейшим возвратом в действительное SP-представление для применения матричного преобразования [14] и повышения устойчивости решения. Однако нет необходимости использовать цепочку преобразований SP–CP–SP, приводящую к преобразованию вида матричных ОСФ (5). Использование $\tilde{P}_k^m(\mu)$ вместо $\tilde{Y}_k^m(\mu)$ в качестве базисных функций дает возможность избежать необходимости перехода в комплексное СР-пространство, если предварительно будут доказаны теорема сложения, соотношения симметрии и рекуррентные формулы для $\tilde{P}_k^m(\mu)$. Эта задача, наряду с учетом полной матрицы рассеяния вместо блочно-диагональной аэрозольной матрицы и переходом к трехмерной геометрии, является предметом текущих исследований авторов.

Авторы благодарят участников научного семинара «Фотометрическая теория диффузного светового поля» кафедры светотехники Московского энергетического института за обсуждение полученных результатов.

1. Розенберг Г.В. Луч света (К теории светового поля) // Успехи физ. наук. 1977. Т. 121. Вып. 1. С. 97–138.
2. Розенберг Г.В. Вектор-параметр Стокса // Успехи физ. наук. 1955. Т. 56. Вып. 1. С. 77–110.
3. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 431 с.
4. Будаков В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.
5. Boudakov V.P. Convergence acceleration of a spherical harmonics method for strong anisotropic scattering // Proc. IRS 2004: Current problems in atmospheric radiation. A. Deepak Publishing, 2006. P. 47–50.
6. Будаков В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 1. С. 36–41.
7. Будаков В.П., Козельский А.В. О точности и границах применимости малоуглового приближения // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 1–2. С. 38–44.
8. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 368 с.

9. *Kuščer I., Ribarič M.* Matrix Formalism in the Theory of Diffusion of Light // *Optica Acta*. 1959. V. 6. P. 42–51.
10. *Астахов И.Е., Будаk В.П., Лисицин Д.В., Селиванов В.А.* Решение векторного уравнения переноса в малоугловой модификации метода сферических гармоник // *Оптика атмосф. и океана*. 1994. Т. 7. № 6. С. 753–761.
11. *Siewert C.E.* A discrete-ordinates solution for radiative-transfer models that include polarization effects // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*. 2000. V. 64. P. 227–254.
12. *Budak V.P., Korkin S.V.* Mathematical model of the polarized light reflection by the turbid medium slab with an anisotropic scattering // *Proc. SPIE*. 2005. V. 5888. 588819.
13. *Korkin S.V., Budak V.P.* The vectorial radiative transfer equation problem in the small angle modification of the spherical harmonics method with the determination of the solution smooth part // *Proc. SPIE*. 2006. V. 6408, 64081I.
14. *Karp A.H., Greenstadt J., Fillmore J.A.* Radiative transfer through an arbitrary thick scattering atmosphere // *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*. 1980. V. 24. N 5. P. 391–406.
15. *Дейрменджан Д.* Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.

V.P. Budak, S.V. Korkin. Modeling the polarization state spatial distribution of the atmosphere-scattered radiation obtained from complete analytical solution for the vector transport equation.

The paper deals with the polarized radiative transfer within a slab irradiated by a collimated infinity-wide beam of arbitrary polarized light. The efficiency of the proposed analytical solution lies in the assumption that the complete vectorial radiative transfer solution is the superposition of the most anisotropic and a smooth parts, computed separately. The vectorial small angle modification of the spherical harmonics method is used to evaluate the anisotropic part; and the vectorial discrete ordinates method is used to obtain the smooth one. The azimuthal expansion is used to describe the light field spatial distribution for the case of abnormal irradiance and to obtain some known neutral points in the sky especially useful for polarized remote sensing of the atmosphere.