

СПЕКТРОСКОПИЯ АТМОСФЕРНЫХ ГАЗОВ

УДК 551.521.31

С.Д. Творогов

О СВЯЗИ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СВЕТА, РАССЕЯННОГО МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ ПОД РАЗНЫМИ УГЛАМИ

Общие теоремы электродинамики утверждают существование соотношений, непосредственно связывающих амплитуды рассеяния на различные углы света макроскопической частицей; на свойства последних каких-либо серьезных ограничений не накладывается. Конкретную реализацию иллюстрирует пример с большими частицами.

§ 1. Предисловие

Чтобы только обозначить задачу, напомним, что во многих оптических диагностических методах заметную роль могут сыграть связи между рассеянием на разные углы. Например, для лазерного зондирования атмосферы надобность связать рассеяние «вперед» и «назад» (коэффициент ослабления и радарное сечение) вырастает до проблемы принципиальной [1]. Имеются в виду выражения вида

$$A(\mathbf{r}_0) = \sum_j b_j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{0j}) A(\mathbf{r}_{0j}) + a(\mathbf{r}_0) \quad (1)$$

для $A(\mathbf{r}_0)$ — величины, связанной с амплитудой рассеяния света в направлении орта \mathbf{r}_0 . Суммирование (с «весом» b_j) проводится по определенному набору углов рассеяния, и $a(\mathbf{r}_0)$ — некоторая известная функция.

Постановка задачи о рассеянии света частицей представлена § 2. В § 3 доказывается своего рода «теорема существования» соотношений типа (1). Ее конкретизация, пригодная для анализа больших (в сравнении с длиной волны) кристаллических частиц весьма произвольной формы, приведена в § 4. Некоторые варианты использования точных формул обсуждаются в § 5.

§ 2. Каноническая задача о рассеянии монохроматического (частоты ω) света частицей

Рис. 1 иллюстрирует величины, в которых решается означенная в заголовке проблема. Частица занимает объем V ($\mathbf{r}' \in V$), поле \mathbf{E} ищется во внешней точке \mathbf{r} , и там

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(s)}. \quad (2)$$

Поле источника \mathbf{E}_0 — «вакуумное»:

$$\Delta \mathbf{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^{(0)} \exp \left[i \frac{\omega}{c} (\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) \right] \quad (3)$$

(с постоянным $\mathbf{E}^{(0)}$), перпендикулярным орту $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_z$, — см. рис. 1; c — скорость света), и $\mathbf{E}^{(s)}$ трактуется как рассеянная волна. Внутри частицы существует поле $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')$. Материал частицы определяет тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ (разумеется, относительный — как свидетельствует (3)) внешняя для V среда объявлена вакуумом и дипольный момент единицы объема (Индукция $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \mathbf{e}_\alpha \frac{\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}'). \quad (4)$$

На рис. 1 представлены две Декартовы системы координат (начало их выбрано «где-то» внутри V): нештрихованная (орты \mathbf{e}_α), связанная с падающей волной (3); штрихованная (орты \mathbf{e}'_α) — совпадающая с главными осями тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$. Здесь же введена сферическая система координат в точке \mathbf{r} наблюдения поля. Наконец, последняя полагается расположенной в волновой зоне:

$$\frac{\omega}{c} r \gg 1, \quad r \gg r' = |\mathbf{r}'|. \quad (5)$$

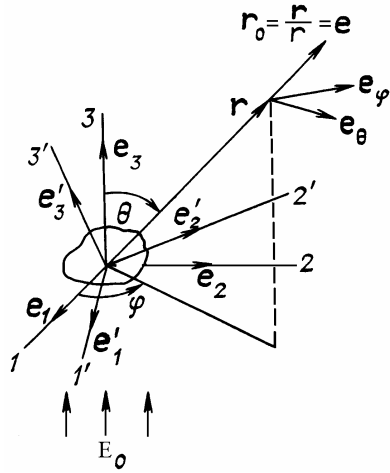


Рис. 1

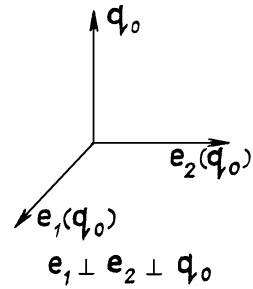


Рис. 2

§ 3. Следствие некоторых общих теорем электродинамики

Сначала процитируем несколько достаточно общих утверждений электродинамики, которые исключительно ради удобства ссылок на них именуются «теоремами». Следствием их и будет возможность писать выражения, подобные (1).

Теорема 1. Система дифференциальных уравнений Максвелла эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \text{rot rot} \int_{(V)} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') P(\mathbf{r}') - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

с $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \exp(i\omega/c) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — функцией Грина оператора Гельмгольца для всего пространства.

Фактически (6) приводится во многих учебниках электродинамики, оптики и теории рассеяния ([2–6] как примеры).

Очевидны и следствия теоремы 1. Для $\mathbf{r}' \in V$, когда $\mathbf{E} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}$, (6) и (4) дадут интегральное уравнение относительно $\tilde{\mathbf{E}}$. После его решения для $\mathbf{E}^{(s)}$ из (2) появится расчетная формула

$$\mathbf{E}^{(s)} = \text{rot rot} \int_{(V)} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}'), \quad (7)$$

пбо $\tilde{\mathbf{E}}$ в (4) будет уже известно.

Теорема 2. В волновой зоне

$$\begin{aligned} E_{\theta}^{(s)} &= \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{\theta} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r} \equiv A_{\theta}^{(s)}(\theta, \varphi) \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r}; \\ E_{\varphi}^{(s)} &= \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{\varphi} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r} \equiv A_{\varphi}^{(s)}(\theta, \varphi) \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$E_r^{(s)} = 0, \quad \Pi(\mathbf{r}_0) = \int_{(V)} d\mathbf{r}' \exp\left(-i \frac{\omega}{c} \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'\right) \mathbf{P}(\mathbf{r}').$$

Здесь $A_{\theta}^{(s)}$ и $A_{\varphi}^{(s)}$ именуются амплитудами рассеянного поля.

В сущности, (8) — почти очевидная асимптотика (5) для (7). (Детали есть, например, в [2, 7, 8]).

Теорема 3. Общая структура поля для $\mathbf{E}^{(s)}$ из (2):

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}) = \int_{(\mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0 > 0} d\mathbf{q}_0 \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{q}_0) B_{\lambda}(\mathbf{q}_0) \exp\left[i \frac{\omega}{c} (\mathbf{q}_0 \mathbf{r})\right];$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}) = i \frac{\omega}{c} \int_{(\mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0) > 0} d\mathbf{q}_0 \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{q}_0 \times \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{q}_0)) B_\lambda(\mathbf{q}_0) \exp \left[i \frac{\omega}{c} (\mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0) \right]; \quad (9)$$

$$B_1(\mathbf{q}_0) = \frac{i\omega}{2\pi c} A_\theta^{(s)}(\mathbf{q}_0), \quad B_2(\mathbf{q}_0) = \frac{i\omega}{2\pi c} A_\varphi^{(s)}(\mathbf{q}_0). \quad (10)$$

Расположение ортов \mathbf{q}_0 , $\mathbf{e}_1(\mathbf{q}_0)$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{q}_0)$ показано на рис. 2.

По-видимому, впервые доказательство (9), (10) приведено в [9]; более детальный вывод повторен в [10].

Существенным следствием теорем 2 и 3 (см. (8)–(10)) оказывается то, что на любом расстоянии от частицы, вплоть до ее границы, $\mathbf{E}^{(s)}$ определено теми же амплитудами, что и в волновой зоне. Это, конечно же, не более чем явный вид замечательного результата теории рассеяния: асимптотическое решение для волновой зоны позволяет восстановить общее решение. (Абстрактная операторная трактовка есть, например, у [11]). В рамках (9) это обретает очень простую интерпретацию — (8) следует из (9) в асимптотике (5).

Теорема 4. Внутреннее поле

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') = & -\frac{1}{4\pi} \frac{c^2}{\omega^2} \hat{\varepsilon}^{-1} \text{rot}' \int d\sigma \{ (\mathbf{n}(\mathbf{r}'') \times \mathbf{E}^{(\sigma)}(\mathbf{r}'')) \times \text{rot}'' \hat{G}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') + (\mathbf{n}(\mathbf{r}'') \times \\ & \times \text{rot}'' \mathbf{E}^{(\sigma)}(\mathbf{r}'')) \hat{G}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') + (\mathbf{n}(\hat{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\sigma)})) \text{div}'' \hat{G}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') \}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) σ — поверхность V с внешней нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{r}'' \in \sigma)$; $\mathbf{E}^{(\sigma)}$ — поле на σ -поверхности раздела сред. Символ « $\hat{\varepsilon}$ » означает «аффинор»; в частности, $\hat{\varepsilon}$ — аффинор с элементами $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\hat{\varepsilon}^{-1}$ — обратный ему аффинор.

Главным является \hat{G} — частное решение уравнения относительно аффинорной функции Грина для всего пространства. В случае (11) этим уравнением будет (\hat{I} — единичный аффинор):

$$\Delta \hat{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \hat{G} + (\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \text{grad div } \hat{G} = -4\pi \text{rot } \hat{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (12)$$

С формальной стороны доказательство (11) — применение теоремы Грина в ее аффинерном исполнении к векторному полю, удовлетворяющему уравнения Максвелла. (Соответствующая техника изложена, например, в [2, 6]).

Разумеется, выбор \hat{G} отнюдь не однозначен, и диктуется он сугубо прагматическими соображениями о возможности найти \hat{G} для рассматриваемой физической ситуации; конечно же, от этого зависит и форма (11). В (12) слагаемое с grad div содержит как множители два параметра — фактор «оптической неоднородности» ($\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}$) и анизотропии; очень часто подобные величины играют роль «параметров разложения» физических решений. Поэтому в хорошем приближении «неудобное» $\text{grad div } \hat{G}$ в (12) можно опустить; последнее в случае крупных частиц усиливает, как выясняется, соответствующий большой параметр.

Но одно обстоятельство является совершенно общим — должны фигурировать именно частные решения для всего пространства, что исключает в (12) поиск общего решения однородной задачи с соответствующими граничными условиями. Физический смысл этого хорошо известен — только так реализуется принцип Гюйгенса — Френеля [2, 3, 6].

Теорема 5. Амплитуда рассеянной волны (в (8) и (10)) при аналитическом продолжении по ω ($\omega \rightarrow z = \omega + i\xi$) представляет в верхней полуплоскости ($\xi > 0$) регулярную функцию, убывающую экспоненциально при $|z| \rightarrow \infty$. Таким же свойством обладает и поле (9).

Доказательство в значительной степени повторяет анализ свойств $\varepsilon_{\alpha\beta}(z)$ из [12, 13], дополненный формулами (6) и (9) — из-за конечности V возникающие в $\tilde{\mathbf{E}}$ функции от z оказываются целыми.

Следствия теоремы 5 очевидны — обычные дисперсионные соотношения между Re и Im амплитуд рассеяния.

Теперь можно перейти к доказательству существования (1). Действительно, непосредственная подстановка в Π из (8) выражений (4) и затем (11) выразит амплитуды рассеяния через $\mathbf{E}^{(\sigma)}$. Далее, граничные условия электродинамики дают возможность написать $\mathbf{E}^{(\sigma)}$ через (2) — у оптики нет проблем с разрывными на границах функциями, поэтому $\mathbf{E}^{(\sigma)} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(s)}$ на σ . Далее формулы (9) и (10) вводят в конструируемое выражение те же амплитуды рассеяния. Остается исследовать возникающий интеграл, чтобы выяснить те характерные точки, которые определяют его значения.

Конечно же, рассмотренная процедура ведет к интегральному уравнению относительно амплитуд или, при желании, $\mathbf{E}^{(s)}$, и оно заменит «двухэтапную» процедуру (6), (7). Свободный член этого уравнения появится из (3), и вклад его в $\hat{\mathbf{E}}$, вычисленный по (11), есть (\times – знак прямого произведения)

$$\frac{c^2}{\omega^2} \hat{\epsilon}^{-1} \text{rot}' \left\{ \text{rot}' \mathbf{E}_0(\mathbf{r})' + \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} d\mathbf{r} \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot (\hat{\epsilon} - \hat{I})) \hat{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} d\mathbf{r} \text{div}(\hat{\epsilon} \mathbf{E}_0 \times \text{div} \hat{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')) \right\}. \quad (13)$$

§ 4. Большие частицы ($(l\omega/c) \gg 1$, l – размеры частицы)

К комментарию по поводу (12) добавим, что асимптотические мотивы, характерные для рассматриваемого случая, позволяют при дифференцировании выражений с функциями Грина подвергать этой операции только $\exp(i\omega/c)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Тогда, представив аффинол в стандартной форме

$$\hat{G} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha}, \text{ получим}$$

$$\mathbf{G}_{\alpha} = i \frac{\omega}{c} V \bar{\epsilon}_{\alpha} Q_{\alpha} \cdot (\mathbf{R}_0 \times \mathbf{e}'_{\alpha}), \quad Q_{\alpha} = \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14)$$

с \mathbf{R}_0 – ортом вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ и ϵ_{α} – собственными значениями тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$; (14) написано в штрихованной системе рис. 1. В этом же приближении можно игнорировать все слагаемые с $\text{div} \hat{G}$.

Теперь рассмотрим часть Π , которая возникает после подстановки $\mathbf{E}^{(s)}$ из (2) в форму (9) в ту цепочку преобразований, что была описана в конце § 3. Существование большого параметра $(l\omega/c)$ предоставляет отличную возможность асимптотической оценки интегралов.

Сначала приемом, изобретенным в [14, 15], проводится асимптотическое интегрирование по r' в (8), (4) (с учетом (14) и для соответствующей $F(R_0)$):

$$\int_{(V)} d\mathbf{r}' \exp\left[-i \frac{\omega}{c} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')\right] F(\mathbf{R}_0) \frac{\exp\left[i \frac{\omega}{c} V \bar{\epsilon}_{\alpha} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|\right]}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \simeq \\ \simeq \frac{2\pi i}{(\omega/c)} F(\mathbf{r}_0) \exp\left[-i \frac{\omega}{c} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'')\right] g_{\alpha}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0); \quad (15)$$

$$g_{\alpha}(\mathbf{r}'', \boldsymbol{\rho}_0) = \int_0^{\infty} d\rho v(r'' + \rho \boldsymbol{\rho}_0) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \rho (V \bar{\epsilon}_{\alpha} - 1)\right] = -1/[2i(\omega/c)(V \bar{\epsilon}_{\alpha} - 1)].$$

В (15) $v(\mathbf{r})$ есть 1 или 0, когда $\mathbf{r} \in V$ или $\mathbf{r} \in \bar{V}$. Второе g_{α} будет при условиях, что $\mathbf{r}'' \in \sigma$ и орт $\boldsymbol{\rho}_0$ направлен «вне частицы» – только такие варианты и присутствуют в дальнейшем анализе.

Формулы (5), (8), (9), (11), (14), (15), дают для последующих упрощений выражение, написанное в штрихованной системе отсчета:

$$\frac{ic}{16\pi\omega} \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}'_{\alpha} \frac{\epsilon_{\alpha} - 1}{\epsilon_{\alpha}} \int d\sigma \int_{(\mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0) \geq 0} d\mathbf{q}_0 \exp\left[-i \frac{\omega}{c} \mathbf{r}_0 \mathbf{r}'' + i \frac{\omega}{c} \mathbf{q}_0 \mathbf{r}''\right] \times \\ \times \{(\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times ((\mathbf{n} \times (\mathbf{q}_0 \times (\mathbf{q}_0 \times \mathbf{B})))) \times \mathbf{r}_0) \hat{J})_{\alpha} - (\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{q}_0 \times (\mathbf{q}_0 \times (\mathbf{q}_0 \times \mathbf{B})))) \hat{K})_{\alpha}\}. \quad (16)$$

Через \hat{J} и \hat{K} обозначены диагональные в штрихованной системе аффинолы с элементами $\epsilon_{\alpha} \sqrt{\epsilon_{\alpha}} / (\sqrt{\epsilon_{\alpha}} - 1)$ и $\epsilon_{\alpha} / (\sqrt{\epsilon_{\alpha}} - 1)$; $(\dots)_{\alpha}$ означает α – компоненту вектора в скобках.

Конечно же, в (16), из-за $\mathbf{r}'' \in \sigma$, существует большой параметр. Однако стратегия асимптотической оценки требует предварительного разъяснения.

Дело в том, что при $\int d\mathbf{q}_0$ нельзя игнорировать $\exp(-i(\omega/c)\mathbf{r}_0 \mathbf{r}'')$, ибо далее предстоит $\int d\sigma$. Но сразу же считать 4-мерный интеграл вряд ли целесообразно: во-первых, пределы интегрирования не независимы; во-вторых, $\mathbf{r}'' = r''(\theta'', \varphi'')$ и влияния этой функции желательно избегать как можно больше; в-третьих, система уравнений для стационарных точек окажется четвертого порядка.

Выход видится в переходе от $\int d\mathbf{q}_0$ к $\int d\mathbf{q}$ (с тем, что \mathbf{q}_0 — орт \mathbf{q}), что позволит ввести переменную $q(\omega/c)\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0$. Технически это достигается подстановкой $\delta(\mathbf{q}^2 - \omega^2/c^2)$ под знак $\int d\mathbf{q}$ и функции Хевисайда с аргументом $\mathbf{q}_0\mathbf{r}''_0 \rightarrow \mathbf{q}\mathbf{r}''$; для новой переменной \mathbf{p} привнесенные операции проделываются «назад», и $\int d\mathbf{q}_0$ из (16) заменится (\mathbf{p}_0 — орт \mathbf{p}) на

$$4 \int d\mathbf{p}_0 |\mathbf{p}_0\mathbf{r}_0| \exp \left[-2i \frac{\omega}{c} (\mathbf{p}_0\mathbf{r}_0) (\mathbf{p}_0\mathbf{r}''_0) \right] H(\mathbf{c}_0), \quad (17)$$

$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{p}_0(\mathbf{p}_0\mathbf{r}_0)$, \mathbf{c}_0 — орт, $(\mathbf{p}_0\mathbf{r}_0) < 0$, $-2(\mathbf{p}_0\mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_0\mathbf{r}''_0) + \mathbf{r}_0\mathbf{r}''_0 \geq 0$. Функция H образована {...} из (16) и множителями перед $\int d\sigma$.

Теперь надобно оценить вклад в (17) стационарных точек и интегрировать его по σ (цикл «А»); то же самое (цикл «В») предстоит проделать для «граничных» точек, определившись предварительно с их смыслом (поэтому и стоят кавычки).

Вычисления в цикле «А» вполне стандартны. Как выясняется, единственная стационарная точка, удовлетворяющая условиям из (17), есть $\mathbf{p}_0 = -(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}''_0) / |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}''_0|$, и вкладом ее в (17) будет

$$-\frac{2\pi i}{r''(\omega/c)} H(r''_0) \exp \left[i \frac{\omega}{c} (1 - \mathbf{r}_0\mathbf{r}''_0) \right]. \quad (18)$$

Асимптотическое интегрирование (18) по σ выглядит совсем просто, если при поиске стационарной точки пренебречь зависимостью \mathbf{r}'' от θ'' и φ'' ; такой точкой окажется тогда \mathbf{r}_0 . Стоит здесь отметить два явно обнадеживающих момента: исчезновение \exp из (18) и \mathbf{r}'' из $d\sigma$. Дело просто в том, что \mathbf{r}'' зависит от выбора начала отсчета (рис. 1), но последнее физически ничем не регламентировано, и поэтому столь неопределенная величина, как \mathbf{r}'' , должна выпадать из конечных формул. Но все-таки подобная неопределенность остается — \mathbf{n} в точке, где направление \mathbf{r}_0 пересекает σ . Ее (в рамках асимптотики) исключим «виртуальным» переходом к объемному интегралу ($\int (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) d\sigma = \int d\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{b}$), и в итоге $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Сама же оценка $\int d\sigma$ стандартна и для функций (18), (16)

$$\int d\sigma f(\mathbf{r}''_0) \exp \left[i \frac{\omega}{c} \mathbf{r}'' (1 - \mathbf{r}_0\mathbf{r}''_0) \right] \simeq \frac{2\pi i r''}{(\omega/c)} f(\mathbf{r}_0). \quad (19)$$

Окончание цикла «А» — это восстановление множителей по (16), (18), (19), переход от \mathbf{p} к амплитудам по (8), (10) и вычисления векторов из (16) ($\mathbf{q}_0 = \mathbf{n} = \mathbf{r}_0$). Далее используется сферическая система координат (см. рис. 1) с обозначениями

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}_0 = \mathbf{g}_3; \quad A_\theta = A_1, \quad A_\varphi = A_2, \quad A_r = A_3. \quad (20)$$

Вклад стационарной точки (17) в амплитуду рассеяния определит вектор

$$-\frac{1}{8} \hat{N} ((\mathbf{g}_1 A_1(\mathbf{r}_0) + \mathbf{g}_2 A_2(\mathbf{r}_0)) (\hat{J} + \hat{K})). \quad (21)$$

Аффиноры \hat{J} и \hat{K} определены после (16); диагональный в штрихованной системе аффинор \hat{N} имеет элементы $(\varepsilon_\alpha - 1) / \varepsilon_\alpha$.

Циклу «В» — оценке влияния «граничных» точек — должно предшествовать довольно обширное предисловие.

Причина, впрочем, вполне очевидна — для больших частиц «рассеяние вперед» (т.е. по орту \mathbf{k}_0 — см. (3) и рис. 1) имеет весьма солидный максимум (примеры можно найти в [16]), и он непременно должен быть представлен в асимптотической оценке (17).

Однако и осциллирующие функции никак нельзя игнорировать, и будем даже полагать, что они по-прежнему главенствующие. Конечно, допущение очень существенное — ведь оно освобождает от надобности вычислять производные по углам орта \mathbf{r}_0 от амплитуды рассеяния.

Как выясняется, результат подобной оценки сравним с (21), и может потому сложиться впечатление, что аналогичным образом можно ввести в итоговую формулу вообще произвольную точку. Но надо помнить о нашем допущении, и формализовать ситуацию позволяет предлагаемый далее трюк.

Точку «максимум амплитуды» объявили «граничной» — той, от которой начинается отсчет углов, что, кстати, вполне по канонам асимптотического анализа [417, 18] — оценка интеграла состоит из вкладов стационарной и граничных точек. В нашем случае это усиливается физическим максимумом»

(граница «верхняя» или «нижняя» значения для 2-мерных интегралов не имеет). Некоторые математические детали и оценки представлены в Приложении I.

Еще один чисто тактический (впрочем, совершенно непринужденный) аргумент появляется во время вычислений — третья ось оказывается выделенной, и звучит это как сигнал тому, чтобы такое направление выделить и физически. Собственно, подобное и достигается выбором нештрихованной системы координат рис. 1 (Напомним, что связана она с падающим извне полем (3), а сейчас рассматривается рассеяние «вперед»).

Формально граничную точку определяет уравнение $\mathbf{c}_0 = \boldsymbol{\kappa}_0$ для \mathbf{c}_0 из (17). Решение, удовлетворяющее (17), есть $\mathbf{p}_0 = (\boldsymbol{\kappa}_0 - \mathbf{r}_0) / \sqrt{2(1 - \boldsymbol{\kappa}_0 \mathbf{r}_0)}$; в последующем $\int d\sigma$ должно быть $\boldsymbol{\kappa}_0 \mathbf{r}_0 \geq 0$ и $\mathbf{r}_0 \neq \boldsymbol{\kappa}_0$ — в выписанном \mathbf{p}_0 предел $\mathbf{r}_0 \rightarrow \boldsymbol{\kappa}_0$ не существует.

Технически цикл «В» абсолютно ясен. Вклад граничной точки в (17), трактуемый как функция от r''_0 , сосредоточен около $\theta'' = 0$ (нештрихованная система координат рис. 1); в остальной области функция асимптотически мала. (Это, кстати, делает тождественными две процедуры: оценку в (16) только стационарных точек и введение «границы» при $\int d\sigma$ и рассматриваемую сейчас). При $\theta'' = 0$ значение ее

$$-\frac{i\pi}{2r''(\omega/c)} \exp \left[i \frac{\omega}{c} r'' (1 - \cos \theta) \right]. \quad (22)$$

Последующее $\int d\sigma$ столь же стандартно, и от \mathbf{n} снова избавляемся прежним приемом. Появляется выражение

$$\frac{2\pi i (\boldsymbol{\kappa}_0 - \mathbf{r}_0)}{(1 - \cos \theta)^2 (\omega/c)} \quad (23)$$

и его надо умножить на (22), устранив там предварительно $1/r''$.

Завершение цикла «В» — перечень множителей из (16), (22), (23), (8), (10) и вычисление векторов {...} из (16) (после замен $\mathbf{q}_0 \rightarrow \boldsymbol{\kappa}_0$, $\mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\kappa}_0 - \mathbf{r}_0$) в системе (20). К (21) добавится слагаемое

$$-\frac{1}{32} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} \hat{N} (L_1 \mathbf{g}_1 + L_2 \mathbf{g}_2),$$

$$\mathbf{L} = (1 - \cos \theta) \mathbf{D} (\hat{K} - \hat{J}) + (\mathbf{r}_0 \mathbf{D}) (\boldsymbol{\kappa}_0 (\hat{K} - \hat{J})) + (\mathbf{r}_0 \mathbf{D}) (\mathbf{r}_0 \hat{J}); \quad (24)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1 \tilde{A}_1(\boldsymbol{\kappa}_0) + \mathbf{e}_2 \tilde{A}_2(\boldsymbol{\kappa}_0).$$

В (24) \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 — проекции \mathbf{A} на орты $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ нештрихованной системы.

Осталось вычислить вклад (13) в \mathbf{II} по цепочке из конца § 3. Можно, конечно, просто оценить асимптотически соответствующие интегралы, но результат оказывается не слишком пригодным для обратных задач. Имеет поэтому смысл сориентироваться на очередной трюк.

Уравнение (12) (без grad div) позволяет убедиться, что в {...} из (13) стоит rot от первых двух членов ряда Неймана уравнения

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \mathbf{E} = -(\hat{\epsilon} - \hat{I}) \mathbf{E} \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (25)$$

Трюк как раз и состоит в подстановке решения (25) вместо (13). Асимптотически оно строится по [14] (гораздо позже метод [14] повторен в [19]), и конечным вкладом в амплитуду оказывается ($\theta \neq 0$ по-прежнему)

$$-\frac{\omega^2 (1 - \cos \theta)}{2\pi c^2} \int_{(S)} dx' dy' \exp \left[-i \frac{\omega}{c} (x' r_{01} + y' r_{02}) \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \mathbf{E}^{(0)} \hat{M} \exp \left[i \frac{\omega}{c} z' (1 - \cos \theta) \right]. \quad (26)$$

Здесь r_{01} и r_{02} — компоненты \mathbf{r}_0 в нештрихованной системе; $\mathbf{E}^{(0)}$ определено в (3); S — проекция частицы на перпендикулярную $\boldsymbol{\kappa}_0$ плоскость (x', y', z' — координаты $\mathbf{r}' \in V$ в нештрихованной системе); диагональный в штрихованной системе аффиноид \hat{M} имеет компонентами $M_\alpha = \exp(i\omega / 2c)(\epsilon_\alpha - 1) \int_{-\infty}^{z'} v(z'') dz''$ с $v(z') = 1$ внутри V и вне его $v = 0$.

§ 5. Обсуждение

В предыдущем параграфе мы продемонстрировали превращение общих теорем § 3 в пригодное для конкретного анализа выражение (1): теперь амплитуду $A(\mathbf{r}_0)$ надобно приравнять сумме (21), (24) и (26). Конечно, подобной акции должны предшествовать физические аргументы, и в § 4 главная роль отведена максимуму «рассеяние вперед».

Прагматический смысл полученного соотношения можно здесь интерпретировать вполне очевидным образом. Ретроспективный взгляд на процедуру его вывода убеждает, что речь не должна идти о вычислении характеристик рассеяния в определенном направлении через другие. Предполагается, что есть измерения (например, матрицы рассеяния) для разных углов рассеяния. Используя их вместе с обсуждаемыми соотношениями, получим информацию о величине (26) — а ее уже можно «обратить» относительно свойств частицы.

Одна из наиболее интересных возможностей — выразить радарное сечение ($\theta = \pi$ в обсуждаемых формулах) через амплитуду волны, рассеянной вперед. Оптическая теорема и следующие из теоремы 5 дисперсионные соотношения позволят написать радарное сечение для частоты ω через интеграл по ω от коэффициента ослабления.

Далее, можно (и нужно) значительно улучшить оценки, если заведомо известно, что частица, например, изотропна или имеет «правильную» форму (сфера, определенным образом ориентированный эллипсоид или цилиндр, и т. д.); впрочем, любая априорная информация послужит, как это бывает в обратных задачах, уточнению многих деталей анализа. Окажется возможным проделать точно $\int d\sigma$ вычислить (26) или (13). По-видимому, для сильно анизотропных частиц имеет смысл уточнить (14) последовательными приближениями.

Конечно, предположение, предшествующее оценкам (22)–(24), может показаться (и совершенно справедливо) слишком вольным. Нет особых формальных проблем с иной оценкой — см. приложение II; и она будет полезной, особенно если частицы не очень крупные. Правда, в обратной задаче появятся некие добавочные трудности.

Отметим еще, что решение (25) (см. приложение II) будет нулевым приближением в том уравнении относительно $E^{(s)}$, о котором шла речь в конце § 3. Хорошо известно в теории рассеяния [20], что подобные результаты прекрасно моделируют точные, и тем самым наш трюк с переходом к (25) получает дополнительную поддержку. Можно выразить надежду, что уже следующая итерация окажется исчерпывающей. (Некоторые детали приведены в приложении III).

Приложение I

Чтобы разъяснить трюк, приведший к (24), рассмотрим интеграл

$$J = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy g(x, y) f(x, y) \exp[i\lambda h(x, y)]. \quad (27)$$

Функция $g(x, y)$ объявляется достаточно медленной, $f(x, y)$ имеет на «нижней границе» (a_1, b_1) максимум — она олицетворяет сейчас модуль амплитуды рассеяния (аргумент комплексной амплитуды можно полагать включенным в g). Параметр $|\lambda| \gg 1$, и вещественная h на нижней границе экстремума не имеет: здесь отличны от нуля

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{a_1, b_1} = \sigma_1, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{a_1, b_1} = \sigma_2. \quad (28)$$

Вычисление вклада границы (a_1, b_1) в (27) станет стандартным после формального $f(x, y) = \exp(\ln f(x, y)) = \exp H(x, y)$ и далее

$$\begin{aligned} b_{11} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{a_1, b_1} = \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a_1, b_1}; \\ b_{12} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right)_{a_1, b_1} = \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{a_1, b_1}; \\ b_{22} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{a_1, b_1} = \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{a_1, b_1}, \end{aligned} \quad (29)$$

поскольку, по предположению, в (a_1, b_1) производные $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$.

После обычного в таких случаях разложения H и h в ряд Тейлора до первых неисчезающих производных, замены переменных $\xi = x - a_1$, $\eta = y - b_1$ и интегрирования по полубесконечным пределам — ведь рассматриваемая комбинация (a_1, b_1) граничная — появится выражение

$$g(a_1, b_1) f(a_1, b_1) \exp[i\lambda h(a_1, b_1)] \times \\ \times \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \exp\left(i\lambda\sigma_1\xi + i\lambda\sigma_2\eta - \frac{1}{2}(|b_{12}|\xi^2 - 2b_{12}\xi\eta + |b_{22}|\eta^2)\right), \quad (30)$$

где принята во внимание отрицательная определенность квадратичной формы с коэффициентами (29).

Интеграл, например, по g

$$\int_0^\infty \exp(-\beta\xi^2 - \gamma\xi) (\cos b\xi + i \sin b\xi) d\xi = K_c + iK_s$$

с $\beta > 0$ (что уже отмечалось) и $b > 0$ (в противном случае просто сменится знак у K_s) табличной:

$$K_c = 1/4 \sqrt{\pi/\beta} \{ (1 - \Phi((\gamma - ib)/2\sqrt{\beta})) \exp[(\gamma - ib)^2/4\beta] + \\ + [1 - \Phi((\gamma + ib)/2\sqrt{\beta})] \exp[(\gamma + ib)^2/4\beta] \}.$$

Выражение для K_s отличается от K_c знаком «минус» между слагаемыми в {...} и множителем i перед {...}; по определению

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Если предположить, что

$$|b| \gg \sqrt{\beta}, \quad |b| \gg |\gamma|, \quad (31)$$

то, применив для $\Phi(z)$ асимптотику «большие $|z|$ », после элементарных преобразований увидим, что $K_s = 1/b$. Для (31) величина $K_c \approx 0$, и обстоятельство это весьма примечательно. Если бы точка максимума f оказалась внутренней, нижний предел в (30) стал бы $(-\infty)$; тогда очевидный переход к сумме квадратов в форме с коэффициентами (29) дал бы $K_s = 0$ точно, а K_c удвоил. И при (31) вклад максимума f оказался бы нулевым (?!).

От интеграла (30) остался

$$\int_0^\infty \exp(-a\eta^2) (\cos b'\eta + i \sin b'\eta) d\eta = N_c + iN_s$$

с $a > 0$ и $b' > 0$ (как ранее). Выписанные интегралы табличны

$$N_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-b'^2/4a); \\ N_s = \frac{b'}{2a} \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{b'^2}{4a}\right) \exp(-b'^2/4a).$$

Снова положим

$$b'^2 \gg a \quad (32)$$

и опять $N_c = 0$ (с прежним комментарием). Асимптотика вырожденной гипергеометрической функции Φ даст $N_s \approx 1/b'$, что вполне эквивалентно оценке K_s .

Восстанавливая значения b и b' , получим вклад (a_1, b_1) в (27):

$$-\frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{a_1, b_1} \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{a_1, b_1}} f(a_1, b_1) g(a_1, b_1) \exp[i\lambda h(a_1, b_1)].$$

Но абсолютно такой же результат появится, если оценивать (27) обычным асимптотическим приемом [17] для f без экстремума — интегрированием по частям, когда при подстановках в свободный член игнорируется верхний предел. Несложно пролонгировать подобное правило и на более замысловатые варианты с равными нулю $\partial h/\partial x$ или $\partial h/\partial y$ и даже с экстремумом h на границе.

В терминах (28), (29) условия (31) и (32) гласят: в «граничной» точке

$$\left| \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \right| \gg \sqrt{\left| \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|} \text{ и } \sqrt{\left| \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|},$$

$$\left| \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \right| \gg \sqrt{\left| \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|} \text{ и } \sqrt{\left| \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|} \quad (33)$$

и математически выражают то допущение, что было сделано перед учетом физического максимума «рассеяние вперед». Становится ясной его математическая суть — большие $|\lambda|$ призваны гарантировать исполнение (33), сделав тем самым максимум f только «фоном» для быстрых осциллирующих $\exp(i\lambda h)$.

Приложение II

Уже упоминался прием [14], позволяющий найти для внутреннего поля физически ясное решение уравнения (25):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}'_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} \exp \left[i \frac{\omega}{c} \mathbf{k}_0 \mathbf{r}' + i \frac{\omega}{2c} \int_0^{\infty} v(\mathbf{r}' - \rho \mathbf{k}_0) d\rho \right]. \quad (34)$$

Использованы штрихованная система координат и обозначения из (3) и (26).

Если подставить (34) в (8), введя $v(\mathbf{r}')$ в интеграл для Π , то при $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_0$ вектор Π будет иметь компоненты, пропорциональные

$$\frac{ic}{2\pi\omega} \int_{(S)} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}' \left(1 - \exp \left[i \frac{\omega}{2c} (\varepsilon_{\alpha} - 1) (z^{(+)}(\mathbf{x}', y') - z^{(-)}(\mathbf{x}', y')) \right] \right) \quad (35)$$

с обозначениями как в (26). (Последнее фактически есть Π , когда $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{k}_0$). Функции $z^{(\pm)}(x', y')$ — решения относительно z' (координаты по оси, параллельной \mathbf{k}_0) уравнения, представляющего поверхность σ .

Теперь, на примере переменной θ (см. рис. 1), можно продемонстрировать оценку производных, фигурирующих в (33). Здесь мы ориентируемся на то примечание по поводу (34), которое было в конце § 5.

В сущности, надобно продифференцировать дважды Π с (34) по θ , положить затем $\theta = 0$ (рассеяние «вперед») и вычислить возникшие интегралы прежним (приведшим к (26) и (34)) приемом. Тогда выяснится, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}' \left(z^{(+)} \exp \left[2i \frac{\omega}{c} (\varepsilon_{\alpha} - 1) (z^{(+)} - z^{(-)}) \right] - z^{(-)} \right) -$$

$$- \frac{f(0)}{\varepsilon_{\alpha} - 1} + \frac{i\omega}{2c} \int_{(S)} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}' (x'^2 + y'^2) \left(1 - \exp \left[i \frac{\omega}{2c} (\varepsilon_{\alpha} - 1) (z^{(+)} - z^{(-)}) \right] \right). \quad (36)$$

Через $f(0)$ обозначена формула (35). Отношение (36) к (35) и следует принять за оценку (29).

Приложение III

Интегральное уравнение непосредственно для $\mathbf{E}^{(s)}$ получится последовательной подстановкой в (7) выражений (4), (11) и (2) вместо $\mathbf{E}^{(s)}$. Снова не пишем слагаемое с $\text{div}'' \hat{G}$ — приближение это уже комментировалось (впрочем, здесь оно совершенно не принципиально). Тогда

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0^{(s)}(\mathbf{r}) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{c^2}{\omega^2} \text{rot rot} \int_{(V)} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') (\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \text{rot}' \int d\sigma \times$$

$$\times \{ (\mathbf{n}(\mathbf{r}'') \times \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}'')) \text{rot}'' \hat{G}(\mathbf{r}''|\mathbf{r}') + (\mathbf{n}(\mathbf{r}'') \times \text{rot}'' \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}'')) \hat{G}(\mathbf{r}''|\mathbf{r}') \}. \quad (37)$$

Свободное слагаемое $E_0^{(s)}$ — объединение (7) и (4), куда в качестве \tilde{E} подставляется (34) — прием из конца § 5, гарантирующий эффективность (37) для частиц с весьма обширным диапазоном размеров.

1. Зуев В.Е., Наац И.Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1962. 242 с.
2. Стрэттон Ж.А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТД, 1948. 539 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
5. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М.: Мир, 1975. 565 с.
6. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. Т. I. 930 с. Т. II. 886 с.
7. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. I. 280 с.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 547 с. Т. 2. 555 с.
9. Соколов В.В., Творогов С.Д. Изв. вузов. Физика. Вып. 7. 1972. С. 29–34.
10. Гордов Е.П., Творогов С.Д. Квантовая теория распространения электромагнитного поля. Новосибирск: Наука, 1978. 173 с.
11. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М.: Мир, 1967. 823 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ, 1959. 532 с.
13. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 461 с.
14. Schiff L. // Phys. Rev. 1956. V. 103. № 3. P. 443–462.
15. Шифф Л. Квантовая механика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 473 с.
16. Зуев В.Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Сов. радио, 1970. 496 с.
17. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: ГИФМЛ, 1962. 127 с.
18. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
19. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
20. Ван-де-Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 423 с.

S. D. Tvorogov. On Relations Between Characteristics of Light Scattered by a Large Particle at Different Angles.

General theorems of electrodynamics establish the existence of relations between the different-angle scattering amplitudes. Any essential restrictions are not imposed on the properties of the particles. The case of large particles is considered as an illustration.