«Оптика атмосферы и океана», **14,** № 1 (2001)

УДК 519.6

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, С.Р. Сарманаев, А.А. Ярыгин

Использование метода Марчука для решения «обратных» задач рассеяния атмосферных примесей, связанных с вычислением статистических характеристик

НИИ аэробиологии ГНЦ ВБ «Вектор», пос. Кольцово, Новосибирская обл.

Поступила в редакцию 29.11. 2000 г.

Рассматривается метод решения «обратных» задач рассеяния атмосферных примесей, основанный на решении уравнения, сопряженного с полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии и двойственным представлением функционала от концентрации примеси. Показано, что возможности этого классического метода могут быть обобщены на класс задач, связанных с вычислением статистических характеристик концентрации примеси. В качестве примера рассмотрена задача оптимального размещения предприятия, выбрасывающего в атмосферу известное количество примеси, при условии, что в выбранной точке пространства концентрация примеси с заданной вероятностью меньше выбранного порогового значения.

Проблема описания распространения аэрозольных и газовых загрязнений атмосферы обычно представляется двумя классами задач. Первый – это решение «прямых» задач, когда по известным характеристикам источников примеси требуется найти поле ее концентрации. Второй – решение «обратных» задач, когда по информации о концентрации примеси в ряде контрольных точек требуется найти тип, координаты и мощность ее источников. При эйлеровом подходе к описанию процесса турбулентной диффузии плодотворным оказывается использование полуэмпирического уравнения, которое является следствием закона сохранения массы [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_i C}{\partial x_i} = Q, \qquad (1)$$

где C – мгновенные значения концентрации примеси; U_i – мгновенные значения компонент скорости среды; t – время; x_i – пространственные координаты, $i = \overline{1,3}$; Q – член, описывающий источники и стоки примеси. По повторяющимся индексам будем подразумевать суммирование. Представим мгновенные значения в виде суммы усредненных по ансамблю (обозначены чертой сверху) и пульсаций (обозначены штрихом) $C = \overline{C} + C'$ и $U_i = \overline{U}_i + U'_i$, подставим их в (1). Произведем усреднение по статистическому ансамблю. После замыкания полученного выражения с привлечением градиентной гипотезы

$$\overline{U'_i C'} = -K_{ij} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}$$

будем иметь [2]:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \overline{C}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} = \overline{Q}, \qquad (2)$$

где K_{ij} – компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии.

Пусть $K_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В общем случае в (2) к $\overline{U}_z$-компоненте следует добавить скорость седиментации частиц V_s (т.е. заменить $\overline{U}_z$ на $\overline{U}_z - V_s$). Решение «прямой» задачи определим в цилиндрической области G с поверхностью S, состоящей из боковой поверхности цилиндра Σ, нижнего основания Σ_0 (при $z = 0$) и верхнего основания Σ_H (при $z = H$). Для решения задачи (2) дополним ее системой начального и граничных условий

$$\overline{C}(x, y, z, 0) = 0;\ \overline{C} = 0 \text{ на } \Sigma, \Sigma_H;$$

$$-V_s \overline{C} - K_{zz} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + V_g \overline{C} = 0 \text{ на } \Sigma_0, \qquad (3)$$

где V_g – параметр взаимодействия частиц с границей Σ_0 ($V_g \geq 0$), на которой выполняется условие «зануления» компонент скорости ветра.

Метод Марчука [3] основан на построении сопряженной с формулой (2) задачи. Умножим (2) на некоторую функцию $\overline{C}_*$ и произведем интегрирование по всей области определения решения. В результате преобразований с учетом условия (3) и бездивергентности поля скорости среды получим

$$-\frac{\partial \overline{C}_*}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \overline{C}_*}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \overline{C}_*}{\partial x_j} = \overline{P}, \qquad (4)$$

с системой начального и граничных условий

$$\overline{C}_*(x, y, z, T) = 0;\ \overline{C}_* = 0 \text{ на } \Sigma, \Sigma_H;$$

$$-K_{zz} \frac{\partial \overline{C}_*}{\partial z} + V_g \overline{C}_* = 0 \text{ на } \Sigma_0, \qquad (5)$$

а также следующее двойственное представление функционала:

$$J_1 = \int_0^T dt \int_G \overline{P}\, \overline{C}\, dG = \int_0^T dt \int_G \overline{C}_*\, \overline{Q}\, dG. \qquad (6)$$

С помощью (6) и решения задачи (4), (5) можно решить широкий спектр «обратных» задач распространения примесей в атмосфере, не прибегая к многократному решению прямого уравнения (2), (3).

В теории метода [3] решение $\bar{C}(x_1, y_1, z_1, T)$ «прямой» задачи (2) с $\bar{Q} = Q_0\,\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0)\,\delta(t)$, где z_0, y_0, z_0 – координаты точечного мгновенного источника примеси, а Q_0 – масса, выброшенная в атмосферу в момент времени $t = 0$, и решение «обратной» задачи (4) $\bar{C}_*(x_0, y_0, z_0, 0)$ при $\bar{P} = \delta(x - x_1)\,\delta(y - y_1)\,\delta(z - z_1)\,\delta(t - T)$ имеют фундаментальное значение. В этом случае согласно (6)

$$\bar{C}(x_1, y_1, z_1, T) = Q_0\,\bar{C}_*(x_0, y_0, z_0, 0). \tag{7}$$

Функция $\bar{C}_*$ в точке x_1, y_1, z_1 в момент времени $t = T$ определяет вклад в математическое ожидание концентрации распространяющейся примеси от источника, расположенного в точке x_0, y_0, z_0 и срабатывающего при $t = 0$. Функцию Грина $\bar{C}_*(x_0, y_0, z_0, 0)$ принято также называть функцией чувствительности.

Область применимости данного метода ограничена тем, что соотношение (6) использует только математические ожидания концентрации. Распространение атмосферных примесей является случайным процессом и поэтому целый класс практически важных задач, где требуется привлечение законов распределения концентрации примеси, недоступен для решения этим методом. Данная работа посвящена обобщению метода Марчука на задачи, связанные с вычислением статистических характеристик распространяющихся в атмосфере примесей.

Рассмотрим (1) в области G, соответствующей $-\infty < x, y, z < +\infty$. Воспользовавшись упомянутым выше приемом и функцией C_*, получим

$$-\frac{\partial C_*}{\partial t} - \frac{\partial U_i C_*}{\partial x_i} = P \tag{8}$$

и интегральное тождество при условии затухания C и C_* на бесконечности:

$$\int_0^T dt \int_G PCdG = \int_0^T dt \int_G C_* Q dG\,. \tag{9}$$

Полагая в нем $Q = \bar{Q}$ и $P = \bar{P}$, будем иметь

$$C(x_1, y_1, z_1, T) = Q_0\, C_*(x_0, y_0, z_0, 0). \tag{10}$$

Возведем обе части (10) в целую степень $m > 0$ и усредним по статистическому ансамблю. В результате имеем набор начальных моментов концентрации

$$\overline{C^m}(x_1, y_1, z_1, T) = Q_0^m\,\overline{C_*^m}(x_0, y_0, z_0, 0). \tag{11}$$

Теперь на основании общих правил теории вероятности [4] можно построить характеристическую функцию концентрации примеси и, воспользовавшись преобразованием Фурье, найти функцию ее распределения $F(C; x, y, z, t)$:

$$F(C; x_1, y_1, z_1, T) = F(Q_0 C_*; x_0, y_0, z_0, 0). \tag{12}$$

Соотношение (12) является обобщением (7) и позволяет оценивать вероятность, с которой концентрация примеси от источника с известной мощностью, но неизвестными координатами превышает некоторое пороговое значение в заданной точке пространства.

В качестве примера рассмотрим задачу размещения предприятия в некоторой точке x_0, y_0, z_0, выбросившего при $t = 0$ массу вещества Q_0. Поставим условие, что в точке x_1, y_1, z_1 при $t = T$ вероятность W_0 наблюдения мгновенного значения концентрации C менее некоторого (например, предельно допустимого) порога C_0 равна $F(C_0)$. Зададим функцию распределения концентрации в виде [5]:

$$F(C) = 1 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{C - \bar{C}}{\beta}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{C + \bar{C}}{\beta}\right)\right], \tag{13}$$

где erf(...) – интеграл вероятности; β – второй параметр закона распределения, связанный с дисперсией концентрации σ^2 соотношением

$$\frac{\sigma^2}{\bar{C}^2} = \operatorname{erf}(\beta_0)\left(1 + \frac{1}{2\beta_0^2}\right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta_0}\exp(-\,\beta_0^2),\ \beta_0 = \bar{C}/\beta. \tag{14}$$

Функция распределения (13) является точным аналитическим решением уравнения Колмогорова [6] и была подтверждена нами в экспериментах, проводившихся в турбулентных пограничных слоях на аэродинамической трубе [5], а ее асимптотические свойства строго соответствуют классическим асимптотикам закона распределения концентрации примесей из теории турбулентного горения [5].

После решения сопряженной задачи (4), (5) получим поле $\bar{C}_*(x, y, z, 0)$. Обратимся к задаче определения дисперсии концентрации σ^2 [7]:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \frac{\partial U_i \sigma^2}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_j} = 2K_{ij}\,\frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}\,\frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} - \alpha\,\sigma^2\,, \tag{15}$$

$\sigma^2(x, y, z, 0) = 0$; $\sigma^2 = 0$ на Σ, Σ_H;

$$-\,2V_s\sigma^2 - K_{zz}\,\frac{\partial \sigma^2}{\partial z} + 2V_g\sigma^2 = 0 \text{ на } \Sigma_0. \tag{16}$$

Сопряженная с (15), (16) задача имеет вид [8]:

$$-\,\frac{\partial \sigma_*^2}{\partial t} - \frac{\partial U_i \sigma_*^2}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \sigma_*^2}{\partial x_j} = -\,\alpha\,\sigma_*^2 + \bar{R}\,, \tag{17}$$

$\sigma_*^2\,(x, y, z, T) = 0$; $\sigma_*^2 = 0$ на Σ, Σ_H;

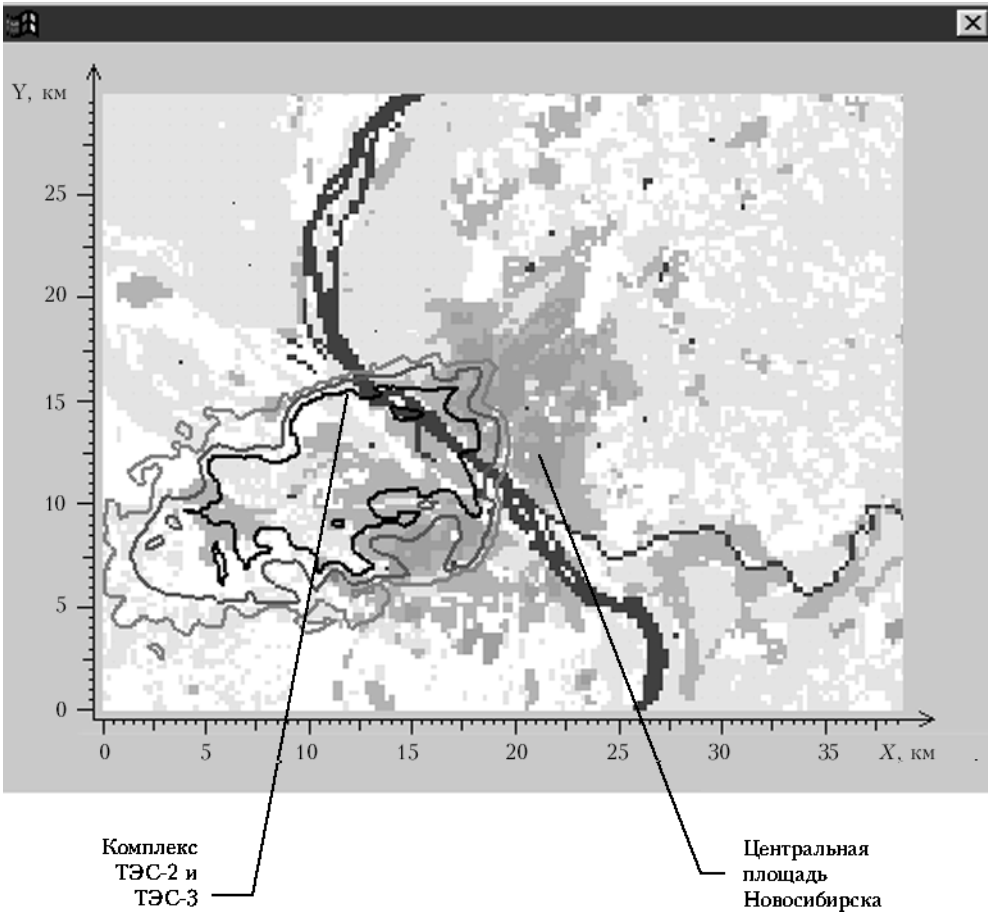
$$-\,V_s\sigma\,\sigma_*^2 - K_{zz}\,\frac{\partial \sigma_*^2}{\partial z} + 2V_g\,\sigma_*^2 = 0 \text{ на } \Sigma_0. \tag{18}$$

Теперь, решив задачу (17), (18) для

$$\bar{R} = 2K_{ij}\,\frac{\partial \bar{C}_*}{\partial x_i}\,\frac{\partial \bar{C}_*}{\partial x_j}\,, \tag{19}$$

получим поле $\sigma_*^2\,(x, y, z, 0) = 0$. По условию задачи

$$W_0 = F(C_0; x_1, y_1, z_1, T). \tag{20}$$



Также с учетом (11) будем иметь

$$\overline{C}(x_1, y_1, z_1, T) = Q_0 \overline{C}_*(x_0, y_0, z_0, 0);$$

$$\sigma^2(x_1, y_1, z_1, T) = Q_0^2 \sigma_*^2(x_0, y_0, z_0, 0). \tag{21}$$

Теперь с помощью (14) можно найти второй параметр закона распределения β. Таким образом, значение W_0 задано условиями задачи, а параметры в (20) определены как функции от координат источника примеси x_0, y_0, z_0. Следовательно, уравнение (20) с учетом конкретного вида F является уравнением поверхности, на которой выполняются поставленные в задаче условия.

На рисунке приведены результаты решения сформулированной выше «обратной» задачи на примере распространения двуокиси азота над г. Новосибирском от точечного стационарного источника с мощностью, эквивалентной действующему в городе комплексу тепловых электростанций ТЭС-2 и ТЭС-3. Река Обь (показана черным цветом) пересекает город с юга на север. Город расположен по обеим сторонам реки и представлен различными оттенками серого цвета (в центре рисунка). Точка, в которой поставлено выполнения условие $C < C_0$ с заданной вероятностью W_0, была выбрана на центральной площади города в его правобережной части на высоте 2 м от поверхности земли. Приведенные на рисунке изолинии представляют собой горизонтальное сечение поверхности, определяемой соотношением (20), на высоте 50 м от земли. Внешняя изолиния соответствует условию, что мгновенная концентрация двуокиси азота меньше предельно допустимой с вероятностью $W_0 = 0{,}95$, внутренняя – $W_0 = 0{,}05$, а средняя – $W_0 = 0{,}5$. Расчеты проведены для типичных почти штилевых, дневных, летних метеоусловий. Приведенные изолинии дают представление о месте безопасного для центра города размещения предприятия, выбрасывающего примесь в атмосферу при заданных метеоусловиях. В действительности ТЭС-2 и ТЭС-3 расположены на левом берегу внутри изолинии с $W_0 = 0{,}05$.

В приведенном примере, в отличие от метода [3], критерий размещения предприятия основан на вероятности непревышения концентрацией примеси заданного порога. Такие задачи невозможно решить с помощью классической интерпретации метода Марчука. В этом смысле полученные в работе соотношения расширяют возможности метода [3] и позволяют решать «обратные» задачи рассеяния атмосферных примесей с привлечением информации о законах распределения их концентрации.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. Гидродинамика и теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 720 с.
3. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
5. *Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
6. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1982. 488 с.

7. *Prediction* Methods for Turbulent Flows / Ed. by W. Kollman. A von Karman Institute Book Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 464 p.

8. *Desyatkov B.M., Sarmanaev S.R., Borodulin A.I., Kotlyarova S.S.* Inverse problem of determination variance of the power of an aerosol pollutants // Atmosph. and Ocean. Opt. 1999. V. 12. N 8. P. 721–723.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, S.R. Sarmanaev, A.A. Yarygin. **Use of Marchuk method for solving «inverse» problems of atmospheric pollutants transfer related to calculation of statistical characteristics.**

The method of solving the inverse problems of atmospheric impurities distribution is considered. The method is based on solving the equation conjugated with semiempirical equation of turbulent diffusion and dual representation of the impurity concentration functional. It is shown that capabilities of this classic method can be extended to a class of practically important problems which call for employment of the laws of the pollutant concentration distribution and statistical characteristics. In this presentation, as an example, we consider the problem of location of a plant as a source of a pollutant providing that in the impurity concentration in the chosen point is lower than the threshold value with the preset probability.