«Оптика атмосферы», т. 4, № 1 (1991)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

УДК 551.510

С.Л. Ощепков, О.В. Дубовик

ИНФОРМАЦИОННОЕ СОДЕРЖАНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СВЕТОРАССЕЯНИЯ

Развит векторный метод анализа точностных характеристик решения обратной задачи, предусматривающий наличие совместного комплекса оптической информации и априорных оценок заданной части восстанавливаемых параметров. Полученные соотношения представлены через факторы чувствительности и коррелированности оптических сигналов на вариациях параметров и проанализированы в зависимости от качества априорных оценок и предельных значений этих факторов.

Исследование информативности оптических характеристик является весьма актуальной проблемой при решении обратных задач светорассеяния. Проведенное на предварительной стадии модельных расчетов, оно служит задачам оптимального планирования оптических экспериментов и гарантирует достоверность извлекаемой об объекте оперативной информации.

Будем исходить из линейной модели взаимосвязи между наборами результатов измерений оптических характеристик $\sigma_j{}^*$ (j = 1, 2, ..., m) и искомых параметров a_i(i = 1, 2, ..., n)

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathrm{U}\mathbf{a} + \boldsymbol{\Delta}_0, \tag{1}$$

где U — матрица с размерностью $m \times n$, векторы $\boldsymbol{\sigma}^*$ и $\mathbf{a}$ определены компонентами $\boldsymbol{\sigma}_j{}^*$ и $\mathbf{a}_i$. Предположим также, что ошибки Δ_0 действительной реализации $\boldsymbol{\sigma}$ преимущественно вызваны случайными погрешностями измерений, нормально распределены и статистически независимы с ковариационной матрицей $\mathbf{C}^2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^* = \Delta_0) = I_m \varepsilon_0^2$, где I_m — единичная матрица размерности $m \times m$.

Основные факторы, ответственные за эффективность решения обратной задачи, содержатся в информационной матрице Фишера

$$\Phi = \frac{\mathrm{U}^T \mathrm{U}}{\varepsilon_0^2}. \tag{2}$$

Ее диагональные элементы, как характеристики средней чувствительности или условной информативности вектора $\boldsymbol{\sigma}$ к $\mathbf{a}_i$, рассмотрены во многих работах (см., например, [1—5]):

$$\Phi_{ii} = \frac{\|\mathbf{U}_i\|^2}{\varepsilon_0^2}, \tag{3}$$

где $\|\mathbf{U}_i\|$ — норма i-го вектора столбца матрицы U. Отметим лишь, что в [1, 2] для учета реального вклада искомого параметра в $\boldsymbol{\sigma}$ вместо Ф используется «матрица информационной обеспеченности» $S = A_0 \Phi A_0$, где A_0 — диагональная матрица параметров $\mathbf{a}_0$ некоторого модельного решения. В [5] при анализе точностных характеристик это осуществляется заменой $\mathbf{a}_i$ на их логарифмы.

Однако по существу вся специфика решения обратной задачи заложена в недиагональных элементах Ф, отвечающих за корреляцию чувствительностей (3) на различных парах параметров. В [1, 2] это учитывается рассмотрением собственных векторов и собственных чисел матрицы S, что ориентировано на поиск линейных комбинаций первичных параметров, относительно которых вектор $\boldsymbol{\sigma}$ дает «независимую» информацию. Оценки для норм или чисел обусловленности матрицы Ф, проведенные в [3], позволяют корректно судить о средней по компонентам a_i, информативности входных данных обратной задачи. Наконец, в работах [6, 7] рассмотрению подлежит непосредственно ковариационная матрица ошибок

$$\mathrm{C}^2(\Delta \tilde{\mathbf{a}}) = (\mathrm{U}^T \mathrm{U})^{-1} \varepsilon_0^2 \tag{4}$$

вектора оценок

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\mathrm{U}^T \mathrm{U})^{-1}\mathrm{U}^T \boldsymbol{\sigma}^* \tag{5}$$

метода наименьших квадратов ($m \geq n$). В данном представлении корреляция чувствительностей в полной мере учитывается в дисперсиях ошибок восстановления параметров, величины недиагональных элементов $\mathrm{C}^2(\Delta\tilde{\mathbf{a}})$ являются мерой соответствия выбранной системы параметров **a** их «независимым» на $\boldsymbol{\sigma}$ линейным комбинациям $\left(0 \leq \frac{\left|\mathrm{C}^2_{i\kappa}\right|}{\sqrt{\mathrm{C}^2_{ii}\mathrm{C}^2_{\kappa\kappa}}} \leq 1\right)$, а переход к последним может быть осуществлен ортогонализацией столбцов матрицы U, например, с помощью известной процедуры Грамма-Шмидта.

Соотношение для дисперсии ошибки восстановления параметров, предусматривающее разделение факторов чувствительности и коррелированности, получено в работе [7]

$$D^2(\Delta\tilde{a}_i) = \frac{\varepsilon_0^2}{\|\mathbf{U}_i\|^2}\,\frac{1}{1-\rho^2_{i,1\ldots(i-1)(i+1)\ldots,n}}\,. \tag{6}$$

Здесь величина $\rho\ldots$ в терминах теории статистических связей является множественным коэффициентом корреляции между вариациями величин σ_j, обусловленными изменениями параметра a_i и остальных $n-1$ параметров $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Геометрически он определяется только углами между векторами $\mathbf{U}_i$. Например, при $n = 2$ $\rho_{12} = \cos(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$; при $n = 3$ $\rho_{1,23}$ — это косинус угла между $\mathbf{U}_1$ и плоскостью, проходящей через векторы $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$. Важно отметить, что такое представление весьма удобно при проведении модельных расчетов и позволяет выявить причины изменения информационного содержания оптических измерений в зависимости от того или иного набора измеряемых и восстанавливаемых параметров. В частности, уменьшение числа совместно восстанавливаемых параметров приводит лишь к уменьшению фактора $\rho^2\ldots$ в (6). В данном методе это реализуется уменьшением размерности пространства столбцов матрицы U. Последнее практически означает, что соответствующая часть параметров, определяемая по независимым от $\boldsymbol{\sigma}$ данным, известна априори точно. Вопрос о наличии априорных оценок вполне правомерен, особенно при ограниченных возможностях оптического эксперимента или создания оперативных процедур его обработки. Однако они отягощены погрешностями, поэтому и соответствующий аппарат анализа информативности должен строиться с учетом качества априорных оценок. Данному вопросу посвящена настоящая статья.

Предположим, что к оптическим измерениям $\boldsymbol{\sigma}^*$ добавляется независимая сопутствующая информация о q параметрах $a_l, \ldots, a_\kappa$, принадлежащих совокупности всех n параметров a_i, значимых при описании оптических свойств дисперсной системы ($\|\mathrm{U}_i\| \gg \|\mathrm{U}_{n+1}\|$). Причем ошибки сопутствующих измерений также нормально распределены и статистически независимы с ковариационной матрицей $\mathrm{C}^2(\Delta_q = \Delta_{i=l,\ldots,\kappa}) = I_q\varepsilon_q^2$. Очевидно, такая информация будет улучшать качество восстановления и r-го параметра a_r, не принадлежащего совокупности $a_l, \ldots, a_\kappa$. Математически это выражается посредством передачи информации через корреляции, описываемые недиагональными элементами матрицы вторых моментов (4), т. е. через величины $\langle\Delta a_r \Delta_l\rangle, \ldots, \langle\Delta a_r \Delta a_\kappa\rangle$. Поэтому для получения соотношений, описывающих такую процедуру, воспользуемся формализмом теории статистических связей, рассматривая вектор погрешностей $\Delta\tilde{\mathbf{a}}$ оценок (5) как вектор случайных коррелированных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Тогда при абсолютно точном задании величин $\Delta\tilde{a}_l, \ldots, \Delta\tilde{a}_\kappa$ (т. е. параметров $a_l, \ldots, a_\kappa$) погрешность $\Delta\tilde{a}_r$ будет описываться некоторой величиной $\Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|\,l\ldots\kappa}$, имеющей условное относительно $\Delta\tilde{a}_l, \ldots, \Delta\tilde{a}_\kappa$ распределение. В этом случае, согласно [8], $\Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|\,l\ldots\kappa}$ будет представлять собой $\Delta\tilde{a}_r$ за вычетом линейной регрессии $\Delta\tilde{a}'_{r\,|\,l\ldots\kappa} = \sum_{i=l,\ldots,\kappa}\beta_{ri}\Delta\tilde{a}_i$ этой величины по $\Delta\tilde{a}_l, \ldots, \Delta\tilde{a}_\kappa$, где β_{ri} — частные коэффициенты регрессии. То есть можно записать

$$\Delta\tilde{a}_r = \Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|\,l\ldots\kappa} + \Delta\tilde{a}'_{r\,|\,l\ldots\kappa}\,. \tag{7}$$

В данном случае за величину $\Delta\tilde{a}_r$ «ответственны» лишь погрешности оптических измерений $\Delta\tilde{a}_r = \mathbf{F}_r\Delta_0$ ($\mathbf{F}_r$ — вектор, образуемый r-й строкой матрицы $\mathrm{F} = (\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{U})^{-1}\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$ (5)), а само соотношение (7) подчеркивает лишь независимость необходимой ниже (13) оценки $\Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|\,l\ldots\kappa}$ от $\Delta\tilde{a}_l, \ldots, \Delta\tilde{a}_\kappa$. Поэтому выражение для оценки ошибки восстановления r-го параметра $\Delta\tilde{a}_{r,\,l\ldots\kappa}$ при произвольном уровне точности задания $a_l, \ldots, a_\kappa$ будет аналогично (7), где второе слагаемое можно рассмотреть как эффективную оценку регрессии по независимым оптическим и априорным данным. С учетом нормального характера ошибок всех измерений и независимости источников информации (Δ_0 и Δ_q) эффективной будет оценка взвешенных наименьших квадратов. Тогда

$$\Delta\tilde{a}_{r,l\dots\kappa} = \Delta\tilde{a}'_{r\,|\,l\dots\kappa} + \frac{P_0\Delta\tilde{a}'_{0(r|l\dots\kappa)} + P_1\Delta\tilde{a}'_{1(r|l\dots\kappa)}}{P_0 + P_1}, \tag{8}$$

а ее дисперсия

$$D^2(\Delta\tilde{a}_{r,l\dots\kappa}) = D^2(\Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|l\dots\kappa}) + \frac{\varepsilon_0^2}{P_0 + P_2}, \tag{9}$$

где P_0 и P_1 — вес оценок

$$P_0 = \frac{\varepsilon_0^2}{D^2\left[\Delta\tilde{a}'_{0(r|l\dots\kappa)}\right]}, \quad P_1 = \frac{\varepsilon_0^2}{D^2\left[\Delta\tilde{a}'_{1(r|l\dots\kappa)}\right]}. \tag{10}$$

Здесь $\Delta\tilde{a}'_{0(r\,|\,l\dots\kappa)}$ и $\Delta\tilde{a}'_{1(r\,|\,l\dots\kappa)}$ — оценки регрессии ошибки восстановления параметра a_r по погрешностям оптических и сопутствующих измерений соответственно

$$\Delta\tilde{a}'_{0(r|l\dots\kappa)} = \sum_{i=l,\dots,\kappa} \beta_{r_i}\mathbf{F}_i\boldsymbol{\Delta}_0; \tag{11}$$

$$\Delta\tilde{a}'_{1(r|l\dots\kappa)} = \sum_{i=l,\dots,\kappa} \beta_{r_i}\boldsymbol{\Delta}_i; \tag{12}$$

а согласно (7)

$$\Delta\tilde{a}^{\perp}_{r|l\dots\kappa} = \mathbf{F}_r\boldsymbol{\Delta}_0 - \sum_{i=l,\dots,\kappa} \beta_{r_i}\mathbf{F}_i\boldsymbol{\Delta}_0. \tag{13}$$

В последующем для простоты индексы в скобках при $\Delta\tilde{a}$ опустим. Учитывая выражения (11)—(13) и известные представления коэффициентов регрессии через миноры ковариационной матрицы ошибок случайных величин [8, 9], можно показать, что дисперсии

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_0) = \mathrm{C}^2\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} r, & l, & \dots, & \kappa \\ r, & l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}{\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} l, & \dots, & \kappa \\ l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}; \tag{14}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_1) = \varepsilon_q^2 \sum_{i=l,\dots,\kappa}\left[\frac{\mathrm{C}^2_{ir}\begin{pmatrix} l, & \dots, & \kappa \\ l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}{\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} l, & \dots, & \kappa \\ l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}\right]^2, \tag{15}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}^{\perp}) = \frac{\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} r, & l, & \dots, & \kappa \\ r, & l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}{\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} l, & \dots, & \kappa \\ l, & \dots, & \kappa \end{pmatrix}}, \tag{16}$$

где $\mathrm{C}^2_{ir}\begin{pmatrix} l, \dots, \kappa \\ l, \dots, \kappa \end{pmatrix}$ — минор матрицы $\mathrm{C}^2(\Delta\tilde{\mathbf{a}})$ (2), отличающийся от ее главного минора $\mathrm{C}^2\begin{pmatrix} l, \dots, \kappa \\ l, \dots, \kappa \end{pmatrix}$ заменой элементов пересечения i-го столбца из совокупности $i = l, \dots, \kappa$ на элементы пересечения r-го столбца со строками с номерами $l, \dots, \kappa$.

Для последующего представления точностных характеристик решения обратной задачи через нормы и углы между векторами $\mathbf{U}_i$ перейдем в (14)—(16) от миноров матрицы (4) к минорам матрицы $\mathrm{B} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}$. Используя известную связь миноров обратной матрицы с исходной [10] и учитывая симметричность B и $\mathrm{C}^2(\Delta\tilde{\mathbf{a}})$, можно получить

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_0) = \varepsilon_0^2 \left[\frac{B\begin{pmatrix} l, \ldots, \kappa, l', \ldots, \kappa' \\ l, \ldots, \kappa, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}{\det B} - \frac{B\begin{pmatrix} l', \ldots, \kappa' \\ l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}{B\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ r, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}} \right]; \tag{17}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_1) = \varepsilon_q^2 \sum_{i=l,\ldots,\kappa} \left[\frac{B\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ i, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}{B\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ r, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}} \right]^2; \tag{18}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}^{\perp}) = \varepsilon_0^2 \frac{B\begin{pmatrix} l', \ldots, \kappa' \\ l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}{B\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ r, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}, \tag{19}$$

где $l', \ldots, \kappa'$ — номера оставшегося набора $n-(q+1)$ столбцов и строк матрицы B, не охватываемого набором с номерами $r, l, \ldots, \kappa$. Он выражает ту часть параметров $a_{l'}, \ldots, a_{\kappa'}$, для которых вместе с a_r отсутствуют априорные оценки. На основе выражения $B_{ij} = \|\mathbf{U}_i\| \|\mathbf{U}_j\| \cos(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)$ для элементов матрицы B вынесем в (17)—(18) нормы $\|\mathbf{U}_i\|$, а оставшиеся угловые функции выразим через коэффициенты, подобные используемым в теории статистических связей. Тогда

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_0) = \frac{\varepsilon_0^2}{\|U_r\|^2} \left[\frac{1}{1 - \rho^2_{r,l\ldots\kappa l'\ldots\kappa'}} - \frac{1}{1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'}} \right]; \tag{20}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}'_1) = \varepsilon_q^2 \sum_{i=l,\ldots,\kappa} \frac{\|\mathbf{U}_i\|^2}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \frac{1 - \rho^2_{i,l'\ldots\kappa'}}{1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'}} \rho^2_{r_i,l'\ldots\kappa'}; \tag{21}$$

$$D^2(\Delta\tilde{a}^{\perp}) = \frac{\varepsilon_0^2}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \frac{1}{1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'}}. \tag{22}$$

Здесь

$$\rho^2_{i,l'\ldots\kappa'} = \frac{\hat{B}\begin{pmatrix} i, l', \ldots, \kappa' \\ i, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}{\hat{B}\begin{pmatrix} l', \ldots, \kappa' \\ l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}; \tag{23}$$

$$\rho^2_{r_i,l'\ldots\kappa'} = \frac{\left[\hat{B}\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ i, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}\right]^2}{\hat{B}\begin{pmatrix} i, l', \ldots, \kappa' \\ i, l', \ldots, \kappa' \end{pmatrix} \hat{B}\begin{pmatrix} r, l', \ldots, \kappa' \\ r, i', \ldots, \kappa' \end{pmatrix}}, \tag{24}$$

а $\hat{B}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ — миноры матрицы $\hat{B}_{ij} = \cos(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)$. Рассматривая $\hat{B}$ как матрицу коэффициентов корреляции низшего порядка между $\mathbf{U}_i$ и $\mathbf{U}_j$, из (23), (24) можно заключить, что $\rho_{i,l'\ldots\kappa'}$ и $\rho_{r_i,l'\ldots\kappa'}$ представляют собой множественные и частные коэффициенты корреляции соответственно. Последний для $n = 3$ геометрически интерпретируется как косинус угла между проекциями векторов $\mathbf{U}_r$ и $\mathbf{U}_i$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{U}_{l'}$.

Подставляя (20)—(22) в (9), окончательно получим

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2 (1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'})} \frac{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \tilde{U}^2 + R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'}}{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \tilde{U}^2 (1 - R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'}) + R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'}}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{U}^2 = \sum_{i=l,\ldots,\kappa} \|\mathbf{U}_i\|^2 \left(1 - \rho^2_{i,l'\ldots\kappa'}\right) \rho^2_{ri,l'\ldots\kappa'}, \tag{26}$$

а введенная величина

$$R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'} = 1 - \frac{1 - \rho^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'}}{1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'}} \tag{27}$$

является обобщением множественного коэффициента корреляции на случай фиксируемых значений $a_{l',\ldots,} a_{\kappa'}$ $(\rho^2_{r,l'\ldots\kappa'} = 0)$ или частного коэффициента корреляции между $\mathbf{U}_r$ и набором $\mathbf{U}_l$, …, $\mathbf{U}_\kappa$. Соотношение (25) значительно упрощается для целого ряда частных случаев, имеющих практический интерес.

При очень точных данных о параметрах $\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0} \to 0\right)$ получим

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \; \frac{1}{1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'}}. \tag{28}$$

Наоборот, при отсутствии о них априорной информации $\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0} \to \infty\right)$:

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \; \frac{1}{1 - \rho^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'}}. \tag{29}$$

По существу в обоих случаях приходим к ранее полученному результату (6), где предельный переход от (29) к (28) выражается в уменьшении числа столбцов матрицы U на набор $\mathbf{U}_l$, …, $\mathbf{U}_\kappa$, что соответствует точным данным о параметрах a_l, …, a_κ [7] или низкой чувствительности оптических характеристик к этим параметрам $\|\mathbf{U}_l\|^2, \ldots, \|\mathbf{U}_\kappa\|^2 \to 0$ (26). Однако из (25), (26) видно, что переход к (28) будет справедлив и при

$$\rho^2_{l,l'\ldots\kappa'};\ \ldots;\ \rho^2_{\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 1, \tag{30}$$

$$\rho^2_{rl,l'\ldots\kappa'};\ \ldots;\ \rho^2_{r\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 0, \tag{31}$$

$$R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 0. \tag{32}$$

Последнее означает, что $\mathbf{U}_r$ коррелирует с остальным набором столбцов матрицы U так же, как с набором $\mathbf{U}_{l'}, \ldots, \mathbf{U}_{\kappa'}$ (27). Каждое из этих условий перекрывает канал передачи априорной информации, но позволяет уменьшить максимальную дисперсию «оптической оценки» (29) до значения (28). Ее же минимальное значение, равное

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2}, \tag{33}$$

найдем при дополнительном к одному из (30)—(32) условии

$$\rho^2_{r,l'\ldots\kappa'} \to 0. \tag{34}$$

Если $R^2_{r,l\ldots\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 1$ и выполняются условия (30) или (31), то опять получим формулу (28), а при

$$\rho^2_{l,l'\ldots\kappa'};\ \ldots;\ \rho^2_{\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 0, \tag{35}$$

$$\rho^2_{rl,l'\ldots\kappa'};\ \ldots;\ \rho^2_{r\kappa,l'\ldots\kappa'} \to 1 \tag{36}$$

роль априорной информации при решении обратной задачи максимальна

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2 (1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'})} \left[\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \sum_{i=l,\ldots\kappa} \|\mathbf{U}_i\|^2 + 1 \right] \qquad (37)$$

и при $\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \gg 1$ или $\|\mathbf{U}_l\|^2, \ldots, \|\mathbf{U}_\kappa\|^2 \gg 1$ дисперсию ошибки восстановления a_r определяют точностные характеристики только априорных оценок.

Предположим, что в ходе решения обратной задачи доопределяются все параметры кроме a_r, либо доопределяется лишь один параметр a_l. Такие ситуации весьма характерны, например, при противопоставлении априорных сведений о функции распределения частиц по размерам и о показателе преломления их вещества. В этих случаях из (25) соответственно получим

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \frac{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \sum_{i=l,\ldots,\kappa} \|\mathbf{U}_i\|^2 \rho^2_{ri} + \rho^2_{r,l\ldots\kappa}}{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 (1 - \rho^2_{r,l\ldots\kappa}) \sum_{i=l,\ldots,\kappa} \|\mathbf{U}_i\|^2 \rho^2_{ri} + \rho^2_{r,l\ldots\kappa}}\,; \qquad (38)$$

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2 (1 - \rho^2_{r,l'\ldots\kappa'})} \frac{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \|\mathbf{U}_l\|^2 (1 - \rho^2_{l,l'\ldots\kappa'}) + 1}{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \|\mathbf{U}_l\|^2 (1 - \rho^2_{l,l'\ldots\kappa'})(1 - \rho^2_{rl,l'\ldots\kappa'}) + 1}. \qquad (39)$$

При $n = 2$ ($\rho_{l,l'\ldots\kappa'} = 0$, $\rho_{rl,l'\ldots\kappa'} = \rho_{rl}$) будем иметь соотношение

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_r\|^2} \frac{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \|\mathbf{U}_l\|^2 + 1}{\left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0}\right)^2 \|\mathbf{U}_l\|^2 (1 - \rho^2_{rl}) + 1}, \qquad (40)$$

которое удобно применять в простейшей распространенной задаче определения концентрации частиц (a_r) при наличии априорных оценок об их некотором эффективном размере (a_l).

Развитый аппарат естественно дополнить выражением, предусматривающим наличие априорной информации и о параметре a_r. Рассматривая оценки a_r по априорным данным и по совокупности $\boldsymbol{\sigma}$, a_l, …, a_κ как независимые, согласно методу взвешенных наименьших квадратов получим

$$\frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r^*)}{\varepsilon_0^2} = \frac{D^2(\Delta\tilde{a}_r)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right)^2}{D^2(\Delta\tilde{a}_r) + \varepsilon_r^2}, \qquad (41)$$

где $D^2(\Delta\tilde{a}_r)$ — определяется формулой (25), а ε_r^2 — дисперсия априорной оценки a_r. Очевидно, при слабом доопределении a_r ($\varepsilon_r^2 \gg D^2(\Delta\tilde{a}_r)$) (41) переходит в (25), а при $\varepsilon_r^2 \ll D^2(\Delta\tilde{a}_r)$ величина $D^2(\Delta\tilde{a}_r) = \varepsilon_r^2$ определяется только ошибкой априорной оценки a_r.

В заключение отметим, что при наличии априорных оценок процедура восстановления вектора $\tilde{\mathbf{a}}$ в отличие от (5) возможна при $m > n - q$. Можно показать, что в частном случае $q = n$, $\varepsilon_r = \varepsilon_q$ она принимает характер регуляризации со стабилизатором нулевого порядка, где в качестве «пробного решения» [11] выступают априорные оценки, а параметр регуляризации определяется отношением дисперсий ошибок оптических измерений и априорных оценок.

1. Яковлев А. А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1976. Т. 12. № 9. С. 930–937.
2. Яковлев А. А. //Проблемы физики атмосферы. Вып. 17. Л.: Изд. ЛГУ, 1982. С. 117–130.
3. Наац И. Э. Теория многочастотного лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1980. 158 с.
4. Емиленко А. С., Толстобров В. Г. Рассеяние света полидисперсным золем. М.: Наука, 1981. 212 с.
5. Ощепков С. Л. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1979. Т. 15. № 10. Р. 1036–1042.
6. Ощепков С. Л. //Оптика и спектроскопия. 1982. Т. 53. № 5. С. 851–856.
7. Ощепков С. Л. //ЖПС. 1982. Т. 37. № 1. С. 149–158.
8. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 900 с.
9. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз. 1962. 352 с.

10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
11. Twomey S. //J. Associat. Comp. Mach. 1963. V. 10. № 9. P. 97–101.

Институт физики АН БССР,
г. Минск

Поступила в редакцию
24 мая 1990 г.

S.L. Oshchepkov, O.V. Dubovik. **Information Content of the Priori Estimates in Solving the Inverse Problems of Light Scattering.**

A vector method has been developed for analyzing the exact characteristics of the solution to the inverse problem. This method envisages the presence of a joint complex of optical information and a priori estimates of a given portion of the parameters to be restored. The obtained relations are given in terms of the factors of sensitivity and correlation of optical signals from the parameters variations and also analyzed depending on the quality of a priori estimates and limiting values of the factors are determined.