

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 537.876.23, 537.877, 621.3.09

Реконструкция фазовых траекторий лазерного пучка, прошедшего турбулентную среду

Т.И. Арсеньян, Д.Ю. Гребенников, Н.А. Сухарева, А.П. Сухоруков*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Поступила в редакцию 29.10.2013 г.

Аппарат фазовых траекторий и фазовых портретов применен для анализа флуктуационных процессов в открытых оптических каналах передачи данных. На основе серии экспериментальных выборок для временных рядов распределения интенсивности пучка в плоскости регистрации выполнена реконструкция размерности пространства вложения для первых двух пространственных моментов. Структура восстановленных фазовых траекторий позволит прогнозировать динамику пространственно-временных флуктуационных процессов на различных масштабах времени.

Ключевые слова: открытый оптический канал, размерность пространства вложения, фазовые траектории, турбулентность; open space optical channel, space of embedding dimension, phase trajectory, turbulence.

Введение

Скоростные характеристики современных открытых оптических каналов и методы пространственно-временного кодирования предъявляют новые требования к точности прогнозирования статистики и динамики флуктуационных свойств каналов передачи данных.

Согласно динамической модели, предложенной Норф [1] и детально описанной Ландау [2], параметры физической системы в турбулентном режиме могут быть аппроксимированы квазипериодической функцией вида

$$u(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_k t) \quad (1)$$

с взаимно простыми характеристическими частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Число собственных частот, регистрируемых в наблюдаемом параметре, зависит от степени развития турбулентности и меняется вместе с характеристическими числами рассматриваемого процесса (числа Рейнольдса, числа Рэлея и пр.).

Традиционно анализ возмущений лазерного пучка при распространении в атмосфере ориентирован на поиск статистических закономерностей флуктуаций в зависимости от длины трассы и метеоусловий. Математический аппарат анализа аэродинамических флуктуаций и аттрактивных форм движения для турбулентных течений предложен Ruelle и Takens [3] и развит в последующих работах [4, 5].

* Татьяна Ишхановна Арсеньян (arsenyan@mail.ru);
Денис Юрьевич Гребенников (grebennikov@physics.msu.ru);
Наталья Александровна Сухарева (suhareva@phys.msu.ru);
Анатолий Петрович Сухоруков (apsmsu@gmail.com).

1. Динамика распределения интенсивности

Описание процесса распространения гауссовского пучка в случайно-неоднородной среде выполним на основе функции Вигнера [6–8], подчиняющейся следующему эволюционному уравнению:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) = \iint W(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}; 0) \times \exp \left[i \left(\omega^* \left(\mathbf{k} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right) - \omega \left(\mathbf{k} - \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right) \right) t \right] e^{-i\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})} d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{r}_1. \quad (2)$$

Подынтегральное выражение в (2) запишем как свертку начальной функции Вигнера рассматриваемой волны с ядром интегрального уравнения, зависящим от разности координат, направления распространения и времени [9]:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) = \int W(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}; 0) L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{k}; t) d\mathbf{r}_1. \quad (3)$$

Здесь ядро

$$L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{k}; t) = \int \exp \left[i \left(\omega^* \left(\mathbf{k} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right) - \omega \left(\mathbf{k} - \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \right) \right) t \right] e^{-i\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})} d\boldsymbol{\theta}. \quad (4)$$

Использование функции Вигнера при анализе временных и пространственных распределений интенсивности пучка исключительно удобно благодаря простоте вычислений интенсивности и пространственной спектральной плотности мощности на основе этой функции [10]:

$$|u(\mathbf{r}, t)|^2 = \int W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Упростим выражение (4) для ядра интегрального уравнения, пренебрегая поглощением излучения на трассе и рассматривая искажения пучка в параксиальном приближении. В таком случае можно полагать частоту $\omega(\mathbf{k})$ действительной величиной и использовать первые члены разложения разности подэкспоненциального выражения в ряд:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) &= \omega\left(\mathbf{k} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) - \omega\left(\mathbf{k} - \frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n+1}\omega(\mathbf{k})}{dk^{2n+1}} \frac{\boldsymbol{\theta}^{(2n+1)}}{2^{2n}(2n+1)!} \sim \\ &\sim \frac{d\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{24} \frac{d^3\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}^3} \boldsymbol{\theta}^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Функция перед линейным по вариации направления слагаемым в разложении (6) соответствует мгновенному значению групповой скорости и определяет как положение «центра тяжести» пучка, так и его снос с оси за счет анизотропных компонент турбулентных течений. Второе слагаемое описывает расплывание профиля пучка за счет абберационных явлений на разномасштабных неоднородностях. При использовании (6) для интерпретации результатов экспериментов следует учесть опущенную в рассуждениях зависимость дисперсионных характеристик от времени.

2. Структура эксперимента и первичной обработки

Серия экспериментов выполнена на модельной горизонтальной трассе, оснащенной снизу нагревательным элементом и боковыми соплами для имитации ветровой нагрузки. Длина трассы определяется углами наклона «гоняющих» плоских зеркал и, как правило, составляет не менее 5 м. Создаваемые на модельной трассе условия обеспечивают режим сильных флуктуаций. Для исключения неконтролируемых температурных и аэродинамических воздействий рабочая зона заключена в цилиндрическую трубу диаметром 0,2 м со щелевыми окнами по торцам. Источником излучения служит твердотельный лазер, работающий на второй гармонике и создающий гауссовский пучок на длине волны 0,48 мкм, рабочий диаметр пучка составляет 12 мм.

Динамика распределения интенсивности на выходе трассы регистрировалась высокоскоростной камерой PULNiX-1300, позволяющей при разрешении рабочего поля 320×240 точек и 10-битном кодировании значения интенсивности выполнять видеофиксацию с частотой кадров 400 Гц и выше без дополнительного сжатия и фильтрации. Длительность отдельного видеоряда составляла не менее 10 с (4000 кадров).

Реконструкцию фазовых траекторий принято выполнять на основе одномерного эквидистантного временного ряда. Создание необходимых рядов происходило при обработке каждого из кадров выборки как элемента ансамбля реализаций распределения ин-

тенсивности. Для кадров определялись первый и второй центральный моменты, характеризующие смещение центра тяжести пучка от оптической оси и его эффективный радиус. Зависящие от времени значения моментов функции распределения интенсивности могут быть представлены на основе (3) и (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{(1)}(t) &= \frac{\int \mathbf{r} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{\int W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) d\mathbf{r} d\mathbf{k}}, \\ \mathbf{M}_R^{(2)}(t) &= \frac{\int (\mathbf{r} - \mathbf{M}_R^{(1)}(t))^2 W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{\int W(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t) d\mathbf{r} d\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что знаменатель выражений (7) соответствует мощности излучения, регистрируемой матрицей. Глубина модуляции ее значения (или отсутствие таковой) может служить мерой степени пространственной когерентности пучка при условии корректной калибровки матрицы видеорегистратора.

3. Размерность пространства вложений

В основе процедуры реконструкции фазовых траекторий и аттракторов лежит теорема Такенса, сформулированная для вложений компактных и замкнутых множеств [11, 12]. Пусть A есть компактное подмножество G -мерного пространства X . Определим вложение подмножества A в K -мерное пространство Y как отображение X в Y такое, при котором совпадение образов двух элементов, принадлежащих A , возможно лишь при равенстве этих элементов. Согласно теореме Такенса любое гладкое отображение X в Y будет задавать вложение A в пространство Y при выполнении условия

$$K \geq 2D_A + 1. \quad (8)$$

Здесь D_A — фрактальная размерность множества A [13].

Полученные в эксперименте временные ряды для моментов функции распределения интенсивности используем для создания K -мерных векторов с временным шагом в s интервалов дискретизации (метод временных задержек) [14]. Построим вектор состояния физической системы по следующему алгоритму:

$$\mathbf{m}[i] = (m[i], m[i-s], \dots, m[i-s(K-1)]), \quad (9)$$

где s — интервал задержки; K — вложенная размерность.

При заданной длине экспериментальной выборки N можем получить $N - s(K - 1)$ векторов. Согласно теореме Такенса при достаточно больших K фазовые траектории, реконструированные по временному ряду (9), будут обладать той же размерностью и математическими свойствами, что и исходная физическая система. Оптимальное значение интервала задержки может быть выбрано из дополнительных

условий, например по первому минимуму автокорреляционной функции исследуемого временного ряда или по положению локального минимума взаимной информации [15]. Общий физический принцип состоит в выборе интервала задержки, достаточного для изменения состояния системы, но не достаточного для потери памяти об исходном состоянии.

Собственно, выбор размерности выполнялся по методу ложных ближайших соседей, предложенному в работах [16, 17]. Для обработки временных рядов использовался пакет статистического анализа *R* [18] с дополнительными библиотеками *tseriesChaos*

и *scatterplot3d* [19, 20]. Примеры оценки размерности вложения для рядов, построенных на базе экспериментальных выборок для компонент векторов первого и второго моментов функции распределения интенсивности, представлены на рис. 1.

Следует отметить практически пороговую зависимость доли ложных соседей от размерности вложения для всех координатных проекций моментов распределения интенсивности. Строго говоря, результат реконструкции размерности вложения может зависеть от интервала задержки. Полученные значения $K = 6$ для компонент момента первого порядка

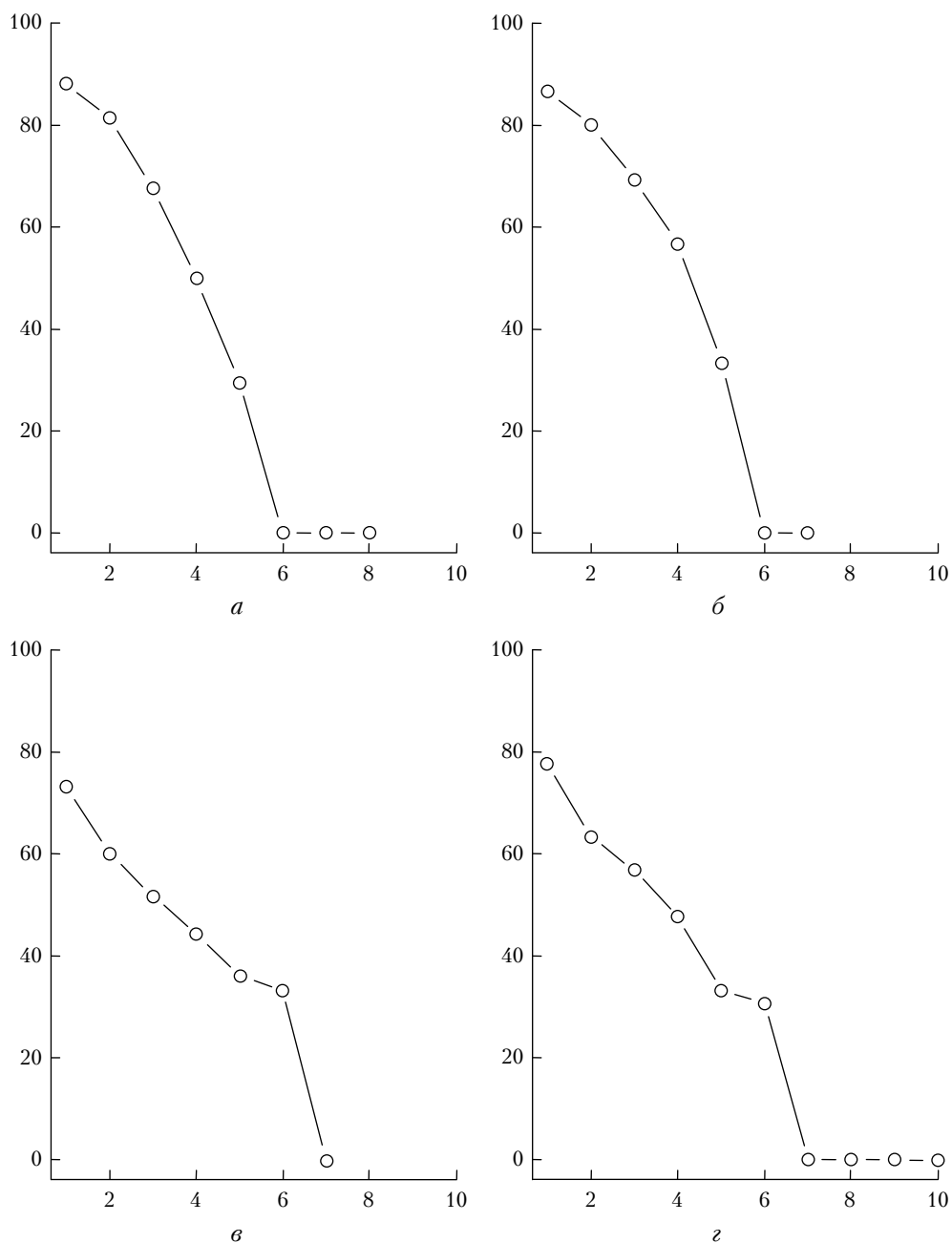


Рис. 1. Зависимость доли ложных ближайших соседей в процентах от размерности пространства вложения K : $a, б$ – X - и Y -компоненты момента первого порядка; $в, г$ – X - и Y -компоненты момента второго порядка соответственно

и $K = 7$ для компонент момента второго порядка позволяют построить фазовую траекторию в двумерном или трехмерном пространстве соответственно.

4. Фазовые портреты

Аппарат фазовых портретов в описании динамики сложных нестационарных систем основан на визуализации дифференциальных или разностных уравнений движения физической системы [21]. В строгом определении для системы с N степенями свободы (независимыми переменными) возможно отображение допустимого множества фазовых траекторий в $2N$ -мерном фазовом пространстве. Орты фазового пространства в общем случае отображают исходную функцию и ее производные по времени. В силу единственности решения дифференциального уравнения при необходимом наборе начальных условий фазовые траектории в пространстве «правильной» размерности не пересекаются [22]. Пересечение траекторий на реконструкциях фазовых портретов свидетельствует о «вынужденном» снижении размерности, например, при использовании метода главных компонент.

Построение семейства фазовых траекторий на основе одномерной эквидистантной во времени выборки выполним, создавая двумерные и трехмерные векторы с варьируемой временной задержкой между компонентами вектора:

$$\mathbf{m}^{(2)}[i] = (m[i], m[i - s]),$$

$$\mathbf{m}^{(3)}[i] = (m[i], m[i - s], m[i - 2s]). \quad (10)$$

Профиль фазовой траектории зависит от соотношения собственных частот анализируемой системы (10) и шага дискретизации. При выполнении соотношения $\tau\omega_i = \frac{1}{2}\pi$ (где τ – временной интервал дискретизации; ω_i – одна из собственных частот) профиль фазовой траектории может приблизиться к эллипсу.

На рис. 2 представлены реконструированные по трехмерным векторам парциальные фазовые траектории, описывающие движение центра тяжести и линейные размеры эффективного эллипса. Следует отметить, что для обеих компонент центра тяжести фазовые портреты с хорошей точностью могут быть отнесены

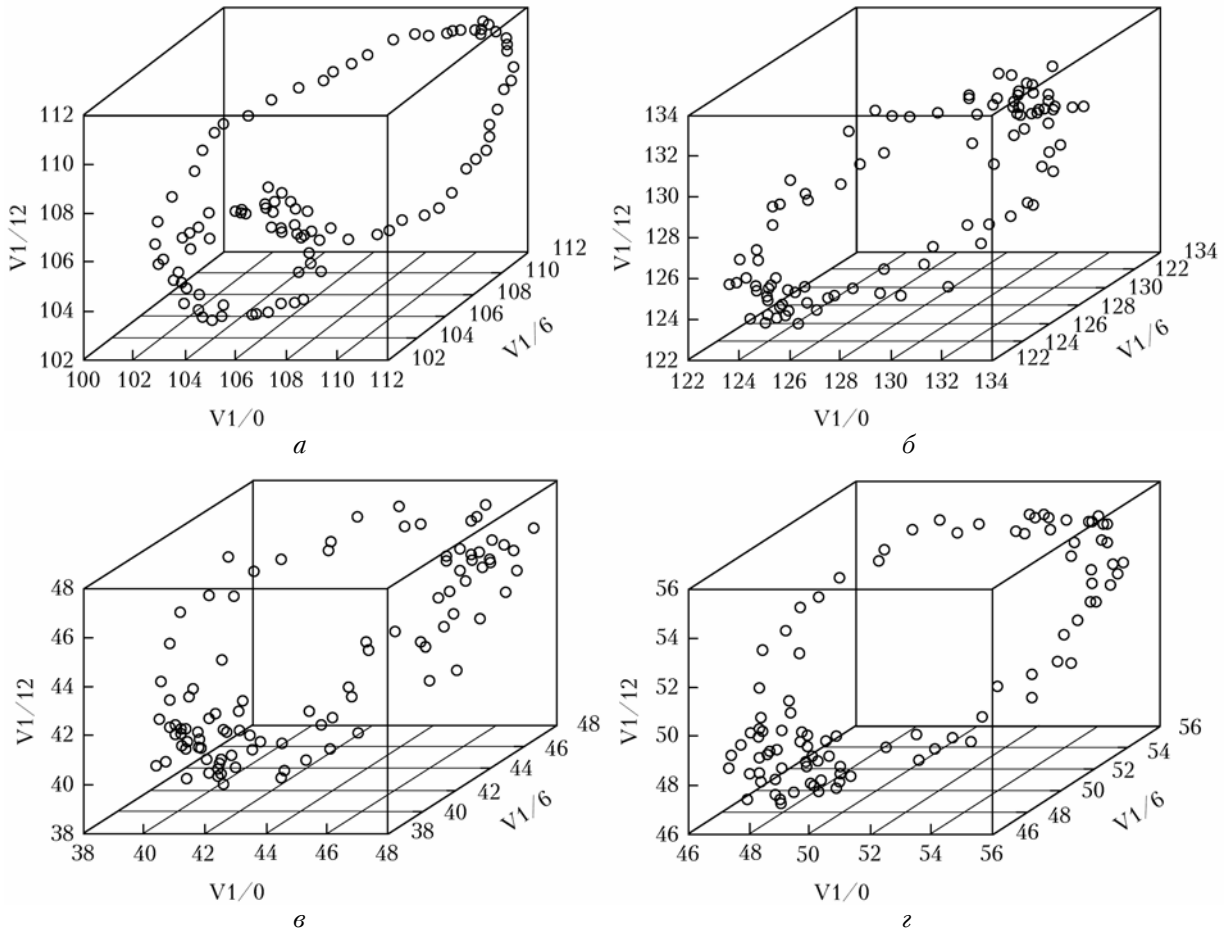


Рис. 2. Примеры парциальных фазовых траекторий: *а, б* – X - и Y -компоненты момента первого порядка; *в, г* – X - и Y -компоненты момента второго порядка соответственно. Знаменатель в описании ортов определяет относительное время задержки компонент отображаемого вектора

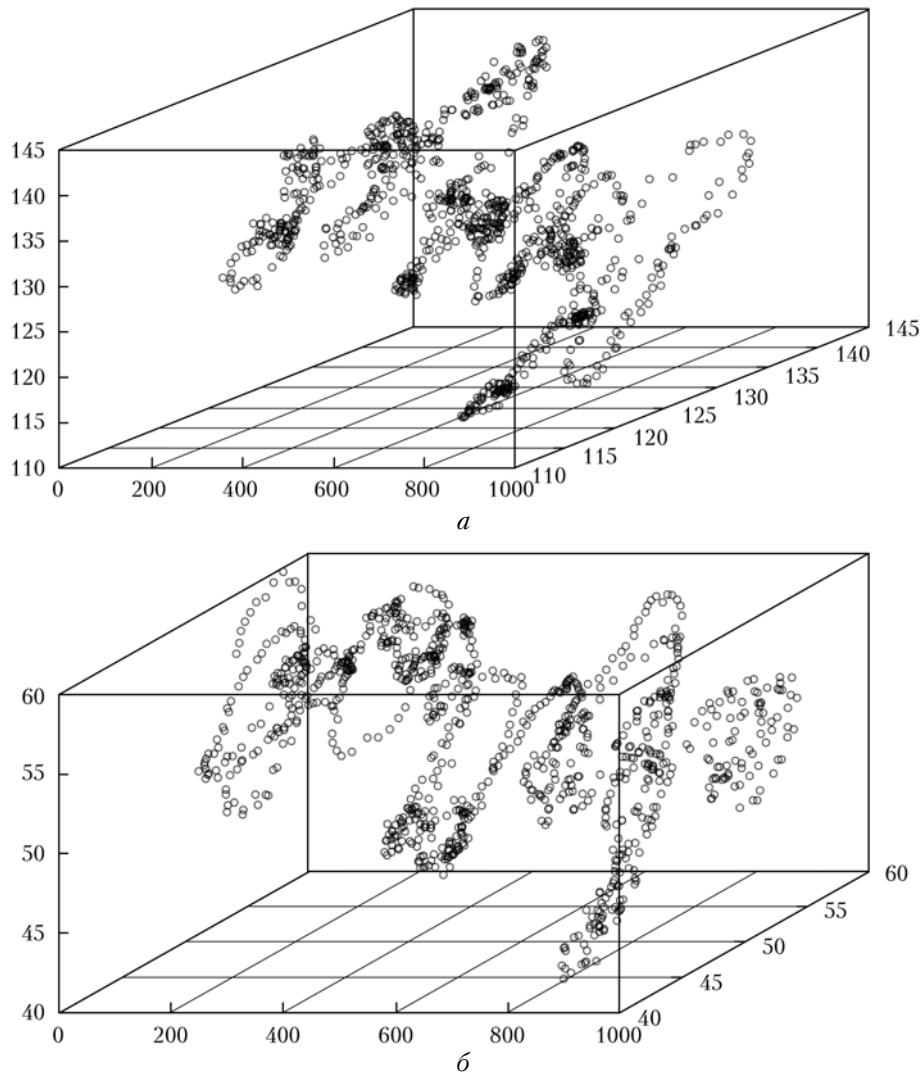


Рис. 3. Развертка во времени фазовых траекторий для Y -компоненты моментов первого (a) и второго (b) порядков соответственно

к плоскости. Построенные подобным образом фазовые траектории на ограниченных интервалах времени позволяют переопределить базисный набор и перейти к привычному виду двумерного фазового портрета. Этот факт подтверждает достаточность однопараметрического описания локальных флуктуаций координат центра тяжести.

Локальные фазовые портреты хорошо отображают микровременную структуру вариаций пространственных свойств лазерного пучка на выходе среды в масштабах времени в несколько собственных периодов T_i . На больших интервалах времени отображения наблюдается суперпозиция фазовых портретов, соответствующих движению с различными характерными частотами. Пример «развернутых по шкале времени» фазовых портретов для координат центра тяжести пучка приведен на рис. 3.

Высокая информативность временной развертки фазовых отображений может позволить качественно, по соотношению радиусов различных парциальных траекторий, восстановить спектр характеристических

частот и динамику переходных процессов между квазистационарными состояниями при различных возмущениях среды.

Заключение

Реконструкция и анализ фазовых портретов для квазистационарных режимов и фазовых траекторий для нестационарных могут быть положены в основу метода визуального контроля динамических режимов пространственных aberrаций лазерного пучка. Благодаря относительной простоте математических алгоритмов обработки первичных экспериментальных выборок описанные методы могут использоваться в оборудовании оперативного контроля состояния оптического канала передачи данных.

Авторы благодарны профессору П.В. Короленко за предоставленную возможность выполнения серии контрольных измерений на экспериментальном оборудовании кафедры оптики и спектроскопии физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

1. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // *Commun. Pure and Appl. Math.* 1948. N 1. P. 303–322.
2. *Ландау Л.Д., Лифушиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Ruelle D., Takens F.* On the Nature of Turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. N 20. P. 167–192.
4. *Marsden J.E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its applications // *Appl. Math. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 1976. N 19. 408 p.
5. *Ruelle D.* Turbulence, Strange Attractors and Chaos // *World Scientific Series on Nonlinear Science Series. A.* 1995. V. 16. 488 p.
6. *Cohen L., Poor H.V., Scally M.O. (eds.)* Classical, Semi-classical and Quantum Noise. DOI: 10.1007/978-1-4419-6624-73, © Springer, LLC 2012. 298 p.
7. *Cohen L., Loughlin P.* Dispersion, its effects and compensation // *Physics of automatic target recognition / F. Sadjadi (ed.)*. V. 3. Berlin: Springer, 2007. P. 105–125.
8. *Арсеньян Т.И., Сухарева Н.А., Сухоруков А.П.* Турбулентные возмущения лазерного пучка в фазовом пространстве // *Вестн. МГУ. Сер. 3.* 2014. № 1.
9. *Cohen L.* On a fundamental property of the Wigner distribution // *71EE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing.* 1987. V. 35. P. 559–561.
10. *Шлях В.П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005. 760 с.
11. *Takens F.* Detecting Strange Attractors in Turbulence // *Lecture Notes in Math.* N.Y.: Springer, 1981. V. 898. P. 366–381.
12. *Sauer T., Yorke J., Casdagli M.* Embedology // *J. Stat. Phys.* 1991. V. 65, iss. 3–4. P. 579–616.
13. *Deyle E.R., Sugihara G.* Generalized Theorems for Non-linear State Space Reconstruction // 2011, PLoS ONE 6(3): e18295. DOI: 10.1371/journal.pone.0018295.
14. *Ильяшенко Ю.С.* Аттракторы и их фрактальная размерность. М.: МЦНМО, 2006. 18 с.
15. *Fraser A.M., Swinney Y.L.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information // *Phys. Rev. A.* 1986. V. 33, iss. 2. P. 1134–1140.
16. *Kennel B., Brown R., Abarbanel H.D.I.* Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45, iss. 6. P. 3403–3411.
17. *Hong-guang M.A., Chong-zhao H.A.N.* Selection of Embedding Dimension and Delay Time in Phase Space Reconstruction // *Frontiers of Electrical and Electronic Engineering in China.* 2006. N 1. P. 111–114.
18. *Пакет статистического анализа R.* URL: <http://cran.r-project.org/>
19. *Библиотека анализа хаотических временных рядов timeseriesChaos.* URL: <http://cran.r-project.org/web/packages/tseriesChaos/>
20. *Библиотека отображения в фазовом пространстве scatterplot3d.* URL: <http://cran.r-project.org/web/packages/scatterplot3d/>
21. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012. 344 с.
22. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2012. 384 с.

T.I. Arsenyan, D.Yu. Grebennikov, N.A. Sukhareva, A.P. Sukhorukov. **Phase trajectories reconstruction for a laser beam propagated through a turbulent media.**

The instrument of phase trajectories and phase portraits is applied to the analysis of the fluctuation processes in the open space optical channels of data transmission. Experimental time series of intensity distributions in the detection plane were used to reconstruct the space of embedding dimension for the first two spatial moments. Knowledge of the structure of the phase trajectories reconstructed would allow one to predict the dynamics of spatial-temporal fluctuation processes for different time scales.